

Міністерство освіти і науки України  
Донбаська державна машинобудівна академія (ДДМА)

# **СУЧАСНІ ФІЗИЧНІ ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕНЬ**

**Конспект лекцій**

**для студентів спеціальності 133 «Галузеве машинобудування»**

Розглянуто і схвалено  
на засіданні кафедри  
«Комп'ютеризовані  
мехатронні системи,  
інструмент і технології»  
Протокол № 1 від 28 серпня 2018 р.

Краматорськ  
ДДМА  
2018

УДК 621

Сучасні фізичні та математичні методи досліджень : конспект лекцій для студентів спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» / уклад. : В. В. Калініченко. – Краматорськ : ДДМА, 2018. – 74 с.

Наведено стислий конспект лекцій з дисципліни «Сучасні фізичні та математичні методи досліджень» для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня освітньо-професійної програми «Галузеве машинобудування» (професійні спрямування «Комп'ютеризовані мехатронні верстати та системи», «Комп'ютерно-інтегровані технології інструментального виробництва) та освітньо-наукової програми «Галузеве машинобудування» (наукове спрямування «Процеси механічної обробки, верстати та інструменти»).

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри «Комп'ютеризовані мехатронні системи, інструмент і технології» (протокол № 1 від 28 серпня 2018 р.).

Електронне навчальне видання

Укладач

В. В. Калініченко, доц.

## ЗМІСТ

ЛЕКЦІЯ 1. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДІ В НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ.....	4
ЛЕКЦІЯ 2. МЕТОДИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ.....	9
ЛЕКЦІЯ 3. МЕТОДИКА ПЛАНУВАННЯ НАУКОВОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ.....	20
ЛЕКЦІЯ 4. МЕТОДИКА ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ НАУКОВОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ.....	33
ЛЕКЦІЯ 5. МЕТОДИ ТЕОРЕТИЧНИХ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ.....	41
ЛЕКЦІЯ 6. МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ У ПРАКТИЦІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ТА ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ .....	47
ЛЕКЦІЯ 7. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В ЗАДАЧАХ АНАЛІЗУ ТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ТА ПРОЦЕСІВ У ТЕХНОЛОГІЧНИХ СИСТЕМАХ.....	53
ЛЕКЦІЯ 8. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В ЗАДАЧАХ АНАЛІЗУ ТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ТА ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ.....	58
ЛЕКЦІЯ 9. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В ЗАДАЧАХ СТРУКТУРНОГО СИНТЕЗУ ТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ТА ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ.....	67
ЛІТЕРАТУРА.....	74

# ЛЕКЦІЯ 1.

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДІВ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

*План.*

*1 Загальна характеристика та класифікація методів наукового пізнання.*

*2 Методи емпіричних наукових досліджень.*

*3 Методи експериментально-теоретичних наукових досліджень.*

*4 Методи теоретичних наукових досліджень.*

*5 Метод системного аналізу.*

*СРС: сфери та приклади використання різних методів наукових досліджень.*

*Література:* [1, с. 14–38; 2, с. 9–40; 3, с. 44–63; 8, с. 11–19].

### *1.1 Загальна характеристика та класифікація методів наукового пізнання*

Досягнення та розробки вчених та практиків здійснюються на основі **наукового пізнання** предметів та явищ матеріального світу, їхніх внутрішніх зв'язків та взаємовідносин. У науковому пізнанні присутні елементи як абстрактного мислення, так і спостереження. Людина виступає як суб'єкт наукового пізнання, що здійснює пізнавальну діяльність на двох рівнях:

1) **емпіричному**, на якому відбувається процес нагромадження фактів;

2) **теоретичному**, на якому досягається синтез нового знання.

У науково-дослідній діяльності людина використовує різні методи наукового пізнання. Під **методом наукового пізнання** розуміємо спосіб досягнення мети, що поєднує суб'єктивні та об'єктивні моменти пізнання.

В залежності від рівня наукового пізнання розрізняють три групи методів наукового пізнання:

1) **методи емпіричних досліджень** (використовуються на емпіричному рівні наукового пізнання);

2) **методи експериментально-теоретичних досліджень** (використовуються як на емпіричному, так і на теоретичному рівнях наукового пізнання);

3) **методи теоретичного дослідження** (використовуються на теоретичному рівні наукового пізнання).

В залежності від можливостей використання методи наукового пізнання поділяються на:

- 1) *загальнонаукові методи наукового пізнання* (знаходять використання для всіх наук);
- 2) *методи наукового пізнання, притаманні для певних наук* (наприклад, хімічних, біологічних чи технічних);
- 3) *спеціальні методи наукового пізнання* (знаходять використання для якоїсь однієї науки).

## **1.2 Методи емпіричних наукових досліджень**

Серед відомих *методів емпіричних наукових досліджень* можна виділити:

- *спостереження;*
- *порівняння;*
- *розрахунок;*
- *вимірювання;*
- *анкетне опитування;*
- *експеримент.*

Ці методи безпосередньо пов'язані з досліджуваними явищами.

**Спостереження** – спосіб пізнання об'єктивного світу, що базується на безпосередньому сприйнятті предметів та явищ за допомогою органів почуттів без втручання у процес з боку дослідника. Спостереження відповідає вимогам навмисності, планомірності, цілеспрямованості, активності та систематичності.

**Порівняння** – встановлення подоби або розходження між предметами та явищами, а також визначення того спільного, що властиве двом або декільком об'єктам; порівняння здійснюється як за допомогою органів почуттів, так і за допомогою спеціальних приладів.

**Розрахунок** – знаходження числа, що визначає кількісне співвідношення однотипних об'єктів або їхніх параметрів, що характеризують ті чи інші їхні властивості.

**Вимірювання** – визначення чисельного значення деякої величини за допомогою одиниці виміру. Вимірювання припускає наявність наступних основних елементів: об'єкту вимірювання, еталону, вимірювальних приладів, методу вимірювання. Вимірювання народилося з операції порівняння.

**Анкетне опитування** – опитування спостерігачів за певним переліком питань, що дозволяє отримати масив фактичної інформації про досліджуваний предмет чи явище.

**Експеримент** – метод наукового вивчення об'єкту, при якому дослідник активно та цілеспрямовано впливає на нього шляхом створення штучних умов або використання природніх умов, необхідних для виявлення відповідних властивостей або закономірностей.

**Переваги експерименту над спостереженням:**

1) усунення шкідливого впливу побічних факторів на результати дослідження;

2) повторюваність експерименту (можливість, на відміну від спостереження, отримання об'єктивного результату дослідження шляхом аналізу не тільки одного випадку, а цілої серії випадків у однакових вихідних умовах);

3) можливість дослідження різних властивостей об'єкту, в тому числі і їхнього взаємного (перехресного) впливу на результати дослідження.

### **1.3 Методи експериментально-теоретичних наукових досліджень**

Серед відомих *методів експериментально-теоретичних наукових досліджень* можна виділити:

- *абстрагування*;
- *аналіз*;
- *синтез*;
- *індукцію*;
- *дедукцію*;
- *моделювання*.

Ці методи допомагають виявити ті чи інші об'єктивні факти у перебігу досліджуваних явищ та процесів.

*Абстрагування* – уявне відволікання від несуттєвих властивостей, зв'язків, відносин досліджуваних предметів чи явищ з виділенням декількох сторін чи аспектів, що цікавлять дослідника. Абстрагування, як правило, здійснюється у два етапи. На першому етапі визначаються та відкидаються несуттєві властивості, зв'язки, відносини предметів, на другому – досліджуваний об'єкт замінюється спрощеною моделлю, що зберігає основні аспекти об'єкту.

*Аналіз* – метод пізнання, який дозволяє розчленовувати предмети дослідження на складові частини (елементи, властивості та відносини).

*Синтез* – поєднання окремих частин або сторін предмета у єдине ціле.

Аналіз та синтез є взаємозалежними та являють собою єдність протилежностей.

*Індукція* – операція логічного згортання від часткового до загального, коли на підставі знання про частину предметів робиться висновок про клас предметів у цілому.

*Дедукція* – операція логічного згортання, у якій висновок про деякий елемент множини робиться на підставі знання про загальні властивості множини.

*Моделювання* – метод, що базується на використанні моделі як засобу дослідження явищ та процесів. *Моделі* можуть бути

*матеріальними* (втіленими у метали, деревині тощо) або *ідеальними* (креслення, схеми, тривимірні моделі, математичні вирази тощо). Моделювання базується на широкому використанні аналогії.

#### **1.4 Методи теоретичних наукових досліджень**

Серед відомих *методів теоретичних наукових досліджень* можна виділити:

- *ідеалізацію*;
- *формалізацію*;
- *аксіоматичний метод*;
- *гіпотетичний метод*.

Ці методи допомагають створити теоретичні узагальнення на основі зібраних даних.

**Ідеалізація** – уявне конструювання об'єктів, що не існують у дійсності або є практично нездійсненними (наприклад, лінія, площа, абсолютно чорне тіло).

**Формалізація** – метод вивчення різноманітних об'єктів шляхом відображення їхньої структури у знаковій формі за допомогою штучних мов, мови математики. Формалізація забезпечує можливість дослідження реальних об'єктів та їхніх властивостей через формальне дослідження відповідних знаків.

**Аксіоматичний метод** – метод побудови наукової теорії, при якому деякі твердження (*аксіоми*) приймаються без доказів, а інші знання виводяться з них за певними логічними правилами.

**Гіпотетичний метод** передбачає розробку на основі вивчення досліджуваних об'єктів та процесів *наукової гіпотези* – форми осмислення фактичного матеріалу, переходу від фактів до знань. Розвиток наукової гіпотези відбувається у три стадії:

- 1) накопичення маси фактичного матеріалу та висловлення на її основі певних припущень;
- 2) формулювання гіпотези, тобто виведення наслідків зі зробленого припущення, розгортання на його основі передбачуваної теорії.
- 3) експериментальна або практична перевірка отриманих висновків та уточнення сформульованої на попередній стадії гіпотези.

Після успішної перевірки гіпотези вона перетворюється на *наукову теорію*.

Гіпотетичний метод передбачає широке використання ідеалізації при формулюванні наукової гіпотези.

## 1.5 Метод системного аналізу

При дослідженні складних технічних систем та процесів у них використовується **метод системного аналізу**, що базується на використанні системного підходу до об'єктів та процесів. За своїми характерними ознаками метод системного аналізу належить до методів метатеоретичного дослідження.

**Основні принципи системного підходу до об'єктів та процесів:**

1) **концепція цілісності** – неможливість зведення складного до простого, цілого до частини, наявність у цілісного об'єкту властивостей та якостей, що не можуть бути властиві його окремим частинам.

2) розгляд **середовища**, якому протиставлена дана система, **надсистеми** та **елементів (підсистем)** системи.

3) поняття **зв'язку** у системі та між системою та середовищем (системою та надсистемою) (**часового, просторового** зв'язку тощо)

4) поняття **структури** та **організації** системи, до яких зводяться сукупність зв'язків системи та їхня типологічна характеристика.

5) характеристика структури системи як за горизонталлю (зв'язки між однопорядковими елементами, наприклад, деталями), так і за вертикаллю (зв'язки «деталь–вузол»), що обумовлює поняття **ієрархії** системи.

6) **керування** – різноманітні за формою способи зв'язків рівнів, що забезпечують функціонування та розвиток системи.

7) пов'язана з наявністю керування необхідність встановлення **мети дії системи**.

8) присутність джерела перетворення системи або її функцій зазвичай у самій системі (**принцип самоорганізації**).

9) правила співвідношення **функціонування** та **розвитку** об'єкту.

**Системний аналіз складається з основних чотирьох етапів:**

**I етап.** Полягає у постановці завдання – визначенні об'єкту, мети та завдань дослідження, також критеріїв для вивчення й керування об'єктом.

**II етап.** Полягає у окресленні меж досліджуваної системи та визначенні її структури (середовища, надсистеми, підсистем, елементів, зв'язків між ними).

**III етап.** Полягає у складанні математичної моделі досліджуваної системи.

**IV етап.** Полягає у аналізі отриманої математичної моделі, визначенні на основі цього оптимальних умов поведінки об'єкту або перебігу процесу (оптимізації системи) та формулювання висновків.



## ЛЕКЦІЯ 2. МЕТОДИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

*План.*

**6** *Поняття, класифікація та завдання експерименту.*

**7** *Загальні принципи організації та планування експерименту.*

**8** *Метрологічне забезпечення експериментальних досліджень.*

*СРС: приклади реалізації практичних підходів до організації експерименту при дослідженні процесів та систем механічної обробки. Метрологічне забезпечення експериментальних досліджень процесів та систем механічної обробки.*

*Література:* [2, с. 53–80; 3, с. 244–268].

### **2.1** *Поняття, класифікація та завдання експерименту*

Надзвичайно важливою складовою частиною наукових досліджень є *експеримент*, основою якого є науково поставлений *дослід*. Саме слово експеримент походить від лат. *experimentum* – проба, дослід.

У науковій діяльності термін «експеримент» зазвичай використовується у значенні, спільному для цілої низки суміжних понять: дослід, цілеспрямоване спостереження, відтворення об'єкту дослідження, організація особливих умов його функціонування, перевірка передбачення.

У поняття експерименту вкладається наукова постановка дослідів та спостереження за досліджуваним явищем в умовах, що дозволяють добре відстежувати явище та відтворювати його щораз при повторенні цих умов.

*Основною метою експерименту* є виявлення властивостей досліджуваних об'єктів, перевірка справедливості гіпотез, і на цій основі – широке й глибоке вивчення теми наукового дослідження.

Постановка та організація експерименту визначаються його призначенням.

Експерименти розрізняються:

- 1) за *способом формування умов* – на *природні* та *штучні*;
- 2) за *цілями дослідження* – на *творчі, контролюючі, пошукові, вирішальні*;
- 3) за *особливостями організації та проведення* – на *лабораторні, натурні, польові, виробничі* тощо;
- 4) за *структурою досліджуваних об'єктів та явищ* – на *прості та складні*;
- 5) за *характером зовнішніх впливів на об'єкт дослідження* – на *речовинні, енергетичні, інформаційні*;
- 6) за *характером взаємодії засобу експериментального дослідження з об'єктом дослідження* – на *звичайні та модельні*;

7) за *типом моделей, досліджуваних у експерименті* – на *матеріальні та уявні*;

8) за *контрольованими величинами* – на *пасивні та активні*;

9) за *числом факторів* – на *однофакторні та багатфакторні*;

10) за *характером досліджуваних об'єктів та явищ* – на *технологічні, соціометричні* тощо.

Для класифікації експериментів можуть бути використані й інші класифікаційні ознаки.

**Природний експеримент** передбачає проведення дослідів у природних умовах існування (функціонування) об'єкту дослідження (найчастіше використовується в біологічних, соціальних, педагогічних та психологічних науках).

**Штучний експеримент** передбачає формування штучних умов проведення дослідження (широко застосовується у природничих та технічних науках).

**Творчий експеримент** передбачає активну зміну структури та функцій об'єкту дослідження відповідно до висунутої гіпотези, формування нових зв'язків та відносин між компонентами об'єкту або між досліджуваним об'єктом та іншими об'єктами. Дослідник навмисно створює умови, що мають сприяти формуванню нових властивостей та якостей об'єкту дослідження.

**Контролюючий експеримент** зводиться до контролю за результатами зовнішніх впливів на об'єкт дослідження з урахуванням його стану, характеру впливу та очікуваного ефекту.

**Пошуковий експеримент** проводиться у випадку ускладненої класифікації факторів, що впливають на досліджуване явище внаслідок відсутності достатніх попередніх (апріорних) даних. За результатами пошукового експерименту встановлюється значимість факторів, здійснюється відсіювання незначущих.

**Вирішальний експеримент** здійснюється для перевірки справедливості основних положень фундаментальних теорій у тому випадку, коли дві або кілька гіпотез однаково узгоджуються з багатьма явищами. Вирішальний експеримент дає такі результати, які узгоджуються з однією з гіпотез та суперечать іншій.

**Лабораторний експеримент** проводиться в лабораторних умовах із застосуванням типових приладів, спеціальних моделюючих установок, стендів, устаткування тощо. Найчастіше в лабораторному експерименті вивчається не сам об'єкт, а його зразок. Лабораторний експеримент дозволяє якісно, з необхідною повторюваністю вивчити вплив одних характеристик при варіюванні інших, одержати максимально повну наукову інформацію з мінімальними витратами часу й ресурсів. Однак такий експеримент не завжди повністю моделює реальний хід досліджуваного процесу, тому виникає потреба в проведенні натурного експерименту.

**Натурний експеримент** проводиться в природних умовах і на реальних об'єктах. Цей вид експерименту часто використовується в процесі натурних випробувань виготовлених систем. Практично у всіх випадках основна наукова проблема натурального експерименту – забезпечити достатню відповідність (адекватність) умов експерименту реальній ситуації, у якій працюватиме створюваний об'єкт.

Центральними завданнями натурального експерименту є:

- 1) вивчення характеристик впливу середовища на випробуваний об'єкт;
- 2) ідентифікація статичних та динамічних параметрів об'єкту;
- 3) оцінка ефективності функціонування об'єкту та перевірка його на відповідність заданим вимогам.

**Простий експеримент** використовується для вивчення об'єктів, що не мають складної розгалуженої структури, з невеликою кількістю взаємозалежних та взаємодіючих елементів, таких, що виконують найпростіші функції.

У **складному експерименті** вивчаються явища або об'єкти зі складною розгалуженою структурою (можна виділити ієрархічні рівні) та більшою кількістю взаємозалежних та взаємодіючих елементів, такі, що виконують складніші функції.

**Інформаційний експеримент** використовується для вивчення впливу певної (різної за формою та змістом) інформації на об'єкт дослідження. За допомогою цього експерименту вивчається зміна стану об'єкту дослідження під впливом повідомленої йому інформації.

**Речовинний експеримент** припускає вивчення впливу різних речовинних факторів на стан об'єкту дослідження (наприклад, вплив різних добавок на якість сталі тощо).

**Енергетичний експеримент** використовується для вивчення впливу різних видів енергії (електромагнітної, механічної, теплової тощо) на об'єкт дослідження. Енергетичний експеримент широко розповсюджений у природничих науках.

**Звичайний (класичний) експеримент** включає експериментатора як суб'єкта пізнання; об'єкт або предмет експериментального дослідження; засоби (інструменти, прилади, експериментальні установки), за допомогою яких здійснюється експеримент. У звичайному експерименті експериментальні засоби безпосередньо взаємодіють із об'єктом дослідження.

**Модельний експеримент** на відміну від звичайного має справу з моделлю досліджуваного об'єкту. Модель входить до складу експериментальної установки, заміщуючи не тільки об'єкт дослідження, але часто і умови, у яких досліджується об'єкт.

Знаряддями **уявного (розумового) експерименту** є уявні моделі досліджуваних об'єктів або явищ (почуттєві образи, образно-знакові моделі, знакові моделі). Для позначення уявного експерименту іноді користуються термінами: ідеалізований або уявлюваний експеримент.

Уявний експеримент є однією з форм розумової діяльності суб'єкту пізнання, у процесі якої відтворюється в його уяві структура реального експерименту. Структура уявного експерименту передбачає: побудову уявної моделі об'єкту дослідження, ідеалізованих умов експерименту та впливів на об'єкт; свідому та планомірну зміну, комбінування умов експерименту та впливів на об'єкт; свідоме й точне застосування на всіх стадіях експерименту об'єктивних законів науки, завдяки чому виключається абсолютна довільність.

**Матеріальний експеримент** має аналогічну структуру. Однак у матеріальному експерименті використовуються матеріальні, а не ідеальні об'єкти дослідження. Основна відмінність матеріального експерименту від уявного полягає в тому, що матеріальний експеримент являє собою форму об'єктивного матеріального зв'язку свідомості з зовнішнім світом, в той час як уявний експеримент є специфічною формою теоретичної діяльності суб'єкту.

**Пасивний експеримент** передбачає вимірювання тільки обраних показників (параметрів, змінних) у результаті спостереження за об'єктом без штучного втручання в його функціонування. Прикладами пасивного експерименту є спостереження за інтенсивністю, складом, швидкостями руху транспортних потоків, за числом захворювань взагалі або якою-небудь певною хворобою, за числом дорожньо-транспортних пригод тощо. Пасивний експеримент, за своєю суттю, є спостереженням, що супроводжується інструментальним вимірюванням обраних показників стану об'єкту дослідження.

**Активний експеримент** пов'язаний з вибором спеціальних вхідних сигналів (факторів) та контролює вхід і вихід досліджуваної системи.

**Однофакторний експеримент** передбачає:

- виділення потрібних факторів;
- стабілізацію заважаючих факторів;
- почергове варіювання факторів, що цікавлять дослідника.

Стратегія **багатофакторного експерименту** полягає в тому, що варіюються усі змінні відразу і кожен ефект оцінюється за результатами усіх дослідів, проведених у даній серії експериментів.

Для проведення експерименту будь-якого типу необхідно:

- розробити гіпотезу, що підлягає перевірці;
- створити програму експериментальних робіт;
- визначити способи та прийоми втручання у об'єкт дослідження;
- забезпечити умови для здійснення процедури експериментальних робіт;
- розробити шляхи й прийоми фіксації перебігу та результатів експерименту;
- підготувати засобу експерименту (прилади, установки, моделі тощо);
- забезпечити проведення експерименту необхідним персоналом.

Особливе значення має вірна розробка **методик експерименту**.

**Методика експерименту** – це послідовність розумових та фізичних операцій, відповідно до якої досягається мета дослідження.

При розробці методик проведення експерименту необхідно передбачати:

- проведення попереднього цілеспрямованого спостереження за досліджуваним об'єктом або явищем з метою визначення вихідних даних, гіпотез, вибору факторів, що підлягають варіюванню;
- створення умов, у яких можливе проведення експерименту (вибір об'єктів, усунення впливу випадкових факторів);
- визначення меж вимірів;
- систематичне спостереження за перебігом досліджуваного явища та точні описи фактів;
- проведення систематичної реєстрації вимірювань та оцінок фактів різними засобами та способами;
- створення повторюваних ситуацій, перехресні впливи, створення ускладнених ситуацій з метою підтвердження або спростування раніше отриманих даних;
- перехід від емпіричного вивчення до логічних узагальнень, до аналізу та теоретичної обробки отриманого фактичного матеріалу.

## **2.2 Загальні принципи організації та планування експерименту**

Перед кожним експериментом складається його **програма**, що включає:

- мету та завдання експерименту;
- вибір факторів, що підлягають варіюванню;
- обґрунтування обсягу експерименту, числа дослідів;
- порядок реалізації дослідів, визначення послідовності зміни факторів;
- вибір кроку зміни факторів, задання інтервалів;
- обґрунтування засобів вимірювання;
- опис проведення експерименту;
- обґрунтування способів обробки та аналізу результатів експерименту.

**Математична теорія експерименту** визначає умови оптимального проведення дослідження, у тому числі і при неповному знанні фізичної сутності явища. Для цього при підготовці та проведенні дослідів використовуються **математичні методи**, що дозволяє досліджувати та оптимізувати складні системи та процеси, забезпечувати високу ефективність експерименту і точність визначення досліджуваних факторів.

Експерименти зазвичай виконуються невеликими серіями дослідів за заздалегідь складеним алгоритмом. Після кожної невеликої серії дослідів здійснюється обробка їхніх результатів та ухвалюється рішення про подальші дії.

При використанні **математичних методів планування експерименту** можливо:

- вирішувати різні питання, пов'язані з вивченням складних процесів та явищ;
- проводити експеримент з метою адаптації технологічного процесу до оптимальних умов його перебігу та забезпечити у такий спосіб високу ефективність експерименту.

Теорія математичного експерименту містить ряд **концепцій**, що забезпечують успішну реалізацію його завдань. До цих концепцій належать:

- **концепція рандомізації**;
  - **концепція послідовного експерименту**;
  - **концепція математичного моделювання**;
  - **концепція оптимального використання факторного простору**
- та низка інших.

**Концепція рандомізації** полягає у тому, що до плану експерименту вводять елемент випадковості. Для цього план експерименту складають таким чином, щоб ті систематичні фактори, які важко піддаються контролю, враховувалися статистично та потім виключалися у дослідженнях як систематичні помилки.

При **послідовному проведенні** експеримент виконується поетапно, результати кожного етапу аналізують, ухвалюючи рішення щодо доцільності подальших досліджень.

У результаті експерименту одержують рівняння регресії, що часто називають моделлю процесу. Для конкретних випадків **математична модель** створюється виходячи із цільового призначення процесу та завдань дослідження, з урахуванням необхідної точності рішення та імовірності вихідних даних.

Важливе місце в теорії планування експерименту займають питання **оптимізації** досліджуваних процесів, властивостей багатокомпонентних систем або інших об'єктів.

Як правило, не можна знайти таку комбінацію значень факторів впливу, при якій одночасно досягається екстремум усіх функцій відгуку. Тому у більшості випадків за критерій оптимальності обирають лише одну функцію відгуку, що характеризує процес, а інші приймають постійними для даного випадку.

**Обчислювальним експериментом** називається методологія та технологія досліджень, засновані на застосуванні прикладної математики та комп'ютерної техніки як технічної бази при використанні математичних моделей. Обчислювальний експеримент ґрунтується на створенні математичних моделей досліджуваних об'єктів, які формуються за допомогою особливої математичної структури, здатної відобразити властивості об'єкту, що проявляються у різних умовах.

Однак ці математичні структури перетворюються на моделі лише тоді, коли елементам структури дається фізична інтерпретація, коли

встановлюється співвідношення між параметрами математичної структури та експериментально визначеними властивостями об'єкту, коли характеристики елементів моделі та самої моделі в цілому відповідають властивостям об'єкту.

Таким чином, математичні структури разом з описом їхньої відповідності експериментально виявленим властивостям об'єкту і є моделлю досліджуваного об'єкта, відбиваючи у математичній, символічній (знаковій) формі об'єктивно існуючі у природі залежності, зв'язки та закони.

Кожен обчислювальний експеримент ґрунтується як на математичній моделі, так і на прийомах обчислювальної математики. Сучасна обчислювальна математика складається з багатьох розділів, що розвиваються разом з розвитком комп'ютерної техніки.

На основі математичного моделювання та методів обчислювальної математики була створена **теорія та практика обчислювального експерименту**, технологічний цикл якого розділяють на наступні етапи:

1 Для досліджуваного об'єкту будується модель, зазвичай спочатку фізична, у ній фіксується поділ усіх діючих факторів на головні та другорядні, які на даному етапі дослідження відкидаються. Одночасно формулюються припущення та умови застосування моделі, межі, у яких будуть справедливими отримані результати. Модель записується у математичних термінах, як правило, у вигляді диференціальних рівнянь.

2 Розробляється метод розрахунку сформульованої математичної задачі. Ця задача представляється у вигляді сукупності алгебраїчних формул, за якими мають вестися обчислення, та умов, що показують послідовність застосування цих формул; набір цих формул і умов називають обчислювальним алгоритмом. При обчислювальному експерименті розв'язання поставлених задач часто залежать від численних вхідних параметрів, проте кожен конкретний розрахунок проводиться при фіксованих значеннях усіх параметрів. Тим часом у результаті експерименту часто ставиться задача визначення оптимального набору параметрів, тому доводиться проводити велику кількість розрахунків однотипних варіантів задачі, що відрізняються значенням деяких параметрів. Це зумовлює використання чисельних методів при обчислювальному експерименті.

3 Розробляються алгоритм і програма розв'язання задачі у комп'ютерному середовищі.

4 Проводяться розрахунки у комп'ютерному середовищі. Точність результату розрахунку визначається імовірністю моделі, покладеної у основу експерименту, вірністю алгоритмів та програм (проводяться попередні «тестові» випробування).

5 Здійснюється обробка результатів розрахунків, їхній аналіз, формулюються висновки. На цьому етапі може виникнути потреба уточнення математичної моделі (ускладнення або, навпаки, спрощення),

використання спрощених інженерних способів розв'язання та формул, що дають можливість отримати результат простішим способом.

Обчислювальний експеримент має виняткове значення у випадках, коли натурні експерименти та побудова фізичної моделі є неможливими. У науці й техніці є чимало областей, у яких обчислювальний експеримент є єдино можливим при дослідженні складних систем.

### **2.3 Метрологічне забезпечення експериментальних досліджень**

Важливе місце у експериментальних дослідженнях посідають вимірювання.

**Вимірювання** – це знаходження фізичної величини дослідним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів.

Суть вимірювання полягає у порівнянні вимірюваної величини з відомою величиною, прийнятою за одиницю (еталон).

Теорією та практикою вимірювань займається **метрологія** – наука про вимірювання, методи та засоби забезпечення їхньої єдності та способи досягнення необхідної точності.

До **основних категорій метрології** належать:

- загальна теорія вимірювань;
- одиниці фізичних величин (величини, яким за визначенням привласнюється числове значення, що дорівнює одиниці) та їхні системи (сукупність основних та похідних одиниць, утворена відповідно до певних принципів, наприклад, Міжнародна система одиниць СІ);
- методи та засоби вимірювань;
- методи визначення точності вимірювань;
- основи забезпечення єдності вимірювань, що передбачають вираз результатів вимірювань в узаконених одиницях, похибок вимірювань – з заданою імовірністю, використання однакових засобів вимірювань.

Найважливіші значення в метрології відображаються еталонами та зразковими засобами вимірювань.

До **еталонів** належать засоби вимірювань (комплекси засобів вимірювань), що забезпечують відтворення та зберігання одиниці вимірювання з метою передачі її розміру іншим засобам вимірювань.

**Зразкові засоби вимірювань** слугують для перевірки робочих (технічних) засобів вимірювань, постійно використовуваних безпосередньо у дослідженнях.

Передача розмірів одиниць від еталонів або зразкових засобів вимірювань до робочих засобів здійснюється державними та відомчими метрологічними органами, чия діяльність забезпечує єдність вимірювань та однаковість засобів вимірювань у країні. Діяльність державних та відомчих метрологічних органів пов'язана з державною системою стандартизації, оскільки метрологія за своєю суттю є стандартизацією



вимірювань та забезпечує порівнюваність показників якості, що закладаються до стандартів.

Методи вимірювань поділяють на *прямі* та *непрямі*.

*При прямих вимірюваннях* шукану величину встановлюють безпосередньо під час досліду.

*При непрямих вимірюваннях* шукану величину визначають як функцію від інших величин, визначених за допомогою прямих вимірювань, наприклад  $b = f(a)$ , де  $b$  – величина, визначена за допомогою непрямих вимірів.

Розрізняють також *абсолютні* та *відносні вимірювання*.

*Абсолютні вимірювання* – це прямі вимірювання у одиницях вимірюваної величини.

*Відносні вимірювання* являють собою відношення вимірюваної величини до однойменної величини, що відіграє роль одиниці, або вимірювання цієї величини відносно однойменної, прийнятої за вихідну. Наприклад, вологість повітря вимірюється у відносних одиницях (відсотках) від повного його водонасичення.

У дослідженнях використовуються *сукупні* та *спільні вимірювання*.

*При сукупних вимірюваннях* одночасно вимірюють кілька однойменних величин, а шукану величину при цьому знаходять шляхом розв'язання системи рівнянь.

*При спільних вимірюваннях* одночасно проводять вимірювання неоднойменних величин для знаходження залежності між ними.

Вирізняють кілька основних *методів вимірювань*.

*Метод безпосередньої оцінки* відповідає визначенню значення величини безпосередньо за відліковим пристроєм вимірювального приладу прямої дії (наприклад, вимірювання маси на циферблатних вагах).

При використанні *методу порівняння з мірою* вимірювану величину порівнюють із величиною, відтвореною мірою (наприклад, вимірювання маси на важільних вагах зі врівноважуванням гирьками).

При *методі протиставлення* здійснюється порівняння з мірою (вимірювана величина та величина, відтворена мірою, одночасно впливають на прилад, за допомогою якого встановлюється співвідношення між цими величинами, як, наприклад, при вимірюванні маси на вагах із вміщенням вимірюваної маси та гирьок на двох протилежних чашках ваг).

При *диференціальному методі* на вимірювальний прилад впливає різниця вимірюваної та відомої величини, відтвореною мірою (наприклад, вимірювання, що виконуються при перевірці довжини порівнянням зі зразковою мірою на компараторі).

При *нульовому методі* результуючий ефект впливу величини на прилад доводять до нуля (наприклад, вимірювання електричного опору мостом з повним його врівноважуванням).

При **методі заміщення** вимірювану величину заміщують відомою величиною, відтвореною мірою (наприклад, зважування з почерговим приміщенням вимірюваної маси та гирьки на ту саму чашку ваг).

При **методі збігів** різниця між вимірюваною величиною та величиною, відтвореною мірою, вимірюється з використанням збігу оцінок шкал або періодичних сигналів.

Невід'ємною частиною експериментальних досліджень є **засоби вимірювань**, тобто сукупність технічних засобів, що мають нормовані похибки та подають необхідну інформацію для експериментатора.

До **засобів вимірювань** належать **міри, вимірювальні прилади, установки та системи**.

Найпростішим засобом вимірювань є **міра**, призначена для відтворення фізичної величини заданого розміру (наприклад, гирька – міра маси).

**Вимірювальним приладом** називають засіб вимірювань, призначений для отримання певної інформації про досліджувану величину в зручній для експериментатора формі. У вимірювальних приладах вимірювана величина перетворюється на показ або сигнал. Вимірювальні прилади класифікують за способом відліку значення вимірюваної величини, за точністю вимірювань, стабільністю показів, чутливістю, межами вимірювань тощо.

**Вимірювальна установка (стенд)** – система, що складається з основних та допоміжних засобів вимірювань, призначених для вимірювання однієї або декількох величин. Установки містять у собі різні засоби вимірювань та перетворювачі, призначені для одно- або багатоступінчастого перетворення сигналу до такого рівня, щоб його можна було зафіксувати вимірювальним механізмом установки. Вимірювальні установки можуть виробляти також сигнали, зручні для автоматичної обробки результатів вимірювань.

Вимірювальні прилади (відлікові пристрої) характеризуються:

- величиною похибки;
- точністю;
- стабільністю вимірювань;
- чутливістю.

**Похибки приладів** бувають **абсолютними** та **відносними**.

**Під абсолютною похибкою** вимірювального приладу розуміємо величину:

$$b = \pm(x_n - x_0),$$

де  $x_n$  – показ приладу (номінальне значення вимірюваної величини);

$x_0$  – дійсне значення вимірюваної величини, отримане більш точним методом.

**Відносна погрішність** визначається відношенням:

$$b_{\text{відн}} = \pm \frac{(x_{\text{п}} - x_{\text{д}})}{x_{\text{д}}} \cdot 100\%$$

Сумарні похибки, встановлені в нормальних умовах ( $t_B = 20^\circ$ ; вологість повітря 80%), називають **основними похибками приладу**.

**Діапазоном вимірювань** називають частину діапазону показів приладу, для якої встановлені похибки приладу.

**Розмахом** називають різницю між максимальним та мінімальним показами приладу. Якщо ця різниця непостійна, то її називають варіацією показів  $W$ .

**Чутливістю** називають здатність відлікового пристрою вимірювального приладу реагувати на зміни вимірюваної величини.

Під **порогом чутливості** приладу розуміють найменше значення вимірюваної величини, що викликає зміну показів приладу, яку можна зафіксувати.

Основною характеристикою приладу є його **точність**. Вона характеризується сумарною похибкою.

Засоби вимірювання поділяються на **класи точності**.

**Клас точності** – це узагальнена характеристика, обумовлена межами припустимих основної та додаткових похибок.

**Стабільність приладу** – це властивість відлікового пристрою забезпечувати сталість показів однієї й тієї ж величини. Внаслідок старіння матеріалів стабільність приладу порушується. Стабільність приладу визначається варіацією показів. Тому при встановленні стабільності нормують величину припустимої варіації показів  $W_\delta$ . Оскільки похибка може мати позитивні або негативні значення, то

$$W_\delta = 0,5 \cdot b_\delta,$$

де  $b_\delta$  – припустима відносна похибка приладу.

Усі засоби вимірювань, що використовуються у наукових дослідженнях, проходять **періодичну перевірку на точність**. Така перевірка передбачає визначення та по можливості зменшення похибок приладів. Перевірка дозволяє встановити відповідність даного приладу регламентованому ступеню точності та визначає можливість його застосування для даних вимірювань, тобто визначаються похибки та встановлюється, чи не виходять вони за межі припустимих значень. Перевірку засобів вимірювань здійснюють на різних рівнях – від спеціальних державних організацій до низових ланок.

## ЛЕКЦІЯ 3. МЕТОДИКА ПЛАНУВАННЯ НАУКОВОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

*План.*

*9 Методи планування експерименту.*

*10 Повний факторний експеримент (ПФЕ).*

*11 Дробовий факторний експеримент (ДФЕ).*

*12 Композиційний план експерименту.*

*13 Ротатабельний план експерименту*

*СРС: приклади використання методів планування експерименту при дослідженні процесів та систем механічної обробки.*

*Література: [7, с. 45–58].*

### *3.1 Методи планування експерименту [7]*

*Планування експерименту* – це процедура вибору кількості та умов проведення дослідів, необхідних і достатніх для вирішення поставленого завдання з необхідною точністю.

У будь-якому експерименті необхідно зазначити або визначити «об'єкт дослідження»; визначити параметр (або параметри), який необхідно оптимізувати або знайти залежність цього параметра (цих параметрів) від діючих на нього (них) факторів.

Таким чином, завдання експерименту полягає в отриманні залежності, що називається *математичною моделлю* об'єкту дослідження  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Величини  $x_1, x_2, \dots, x_n$  називаються *факторами*, а  $y$  – *цільовою функцією, функцією відгуку* або *параметром оптимізації*.

*Параметр оптимізації* повинен:

- бути кількісним, задаватися одним числом;
- ефективно (у тому числі і в статистичному сенсі) оцінювати функціонування системи або процесу;
- бути універсальним, тобто здатним всебічно характеризувати об'єкт.

У різанні металів параметрами оптимізації можуть бути: шорсткість поверхні, інтенсивність зносу інструменту, сила різання тощо.

До *факторів* планованого експерименту висувається ряд вимог:

- фактори повинні бути керованими, експериментатор повинен мати можливість підтримувати фактор на постійному рівні або змінювати за заданою програмою;
- фактори повинні мати можливість визначатися (задаватися, вимірюватися) з якомога вищою точністю;
- фактори повинні бути однозначними та безпосередньо впливати на об'єкт досліджень;

– для сукупності використовуваних в одному дослідженні факторів висувається вимога їхньої сумісності, тобто можливості здійснення всіх їх комбінацій та відсутність кореляції між факторами.

У різанні металів цим вимогам задовольняють наступні фактори:

- елементи режиму різання  $t$ ,  $s$ ,  $v$ ;
- геометричні параметри різальної частини інструменту;
- межа міцності досліджуваного матеріалу;
- кількість мастильно-охолоджуючої рідини, що подається у зону різання тощо.

Головною вимогою, що висувається до моделі  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , є її здатність передбачати значення функції відгуку у будь-якій точці охопленого дослідженням факторного простору.

Модель, що задовольняє цій умові, називають **адекватною**.

Найбільш простою моделлю є поліном. Для випадку 2-х змінних факторів це:

- поліном нульового ступеня:  $y = b_0$ ;
- поліном першого ступеня:  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ ;
- поліном другого ступеня:  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2$ ;
- поліном третього ступеня:  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{112}x_1^2x_2 + b_{112}x_1x_2^2 + b_{111}x_1^3 + b_{222}x_2^3$ ;
- поліном другого ступеня для 3-х факторів:  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3$ .

Для планування експерименту велике значення має область зміни кожного змінного фактору (область факторного простору). Цю область обирають на підставі аналізу апріорної інформації.

Межі областей визначення факторів можуть бути пов'язані з обмеженнями, серед яких:

- принципові обмеження, що не можуть бути порушені ні за яких обставин (наприклад, якщо фактор – температура, то нижню межу не можна приймати нижче абсолютного нуля);
- обмеження техніко-економічного характеру (вартість матеріалів, трудомісткість дослідів тощо);
- обмеження, пов'язані з конкретними умовами проведення експерименту (наприклад, при дослідженні процесу різання, коли  $t$ ,  $s$ ,  $v$  одночасно набувають верхніх рівнів, може бути недостатньою потужність верстата).

Умови експерименту подаються у вигляді таблиці, званою матрицею планування експерименту.

Існує два основних типи однофакторного експерименту:

- послідовний;
- рандомізований (випадковий);

Сутність **послідовного** експерименту полягає в тому, що рівень фактору змінюється стрибкоподібно, тобто використовується послідовна, покрокова стратегія. Після кожного кроку здійснюється аналіз результатів і на підставі аналізу ухвалюється рішення про хід подальших досліджень.

Послідовний експеримент доцільний в наступних випадках:

- якщо відомо, що він невідтворюваний (наприклад, випробування сталевого зразка на розтягування);

- коли випробувана система (об'єкт) має деякі особливості, які можна виявити лише при отриманні даних у регулярній послідовності. Наприклад, при виконанні аналізу стабільності технологічного процесу механічної обробки, будують точкову діаграму в координатах: розмір (ордината) – час або номер вибірки (абсциса). Коли яка-небудь точка виходить за контрольну межу (допуск), проводять підналагодження верстата;

- якщо тривалість, вартість або складність експериментів такі, що рандомізований експеримент недоцільний. Наприклад, вивчення роботи термічних печей, установок для ХТО, час досягнення теплової рівноваги яких досягає декілька днів, тому зміна умов їх роботи повинна бути як можна меншою.

Якщо рівень фактору змінюється випадковим чином, набуваючи то менших, то більших значень, план експерименту називається **рандомізованим**. Основною метою **рандомізації** є зведення ефекту деякого випадкового фактору до випадкової помилки.

Найбільш поширені **систематичні похибки** експерименту зумовлені:

- зміною зовнішніх умов у процесі експерименту (наприклад, зміною температури, вологості, тиску атмосфери, зміною стану випробовуваної системи (нагрівання або охолодження), а також впливом розташованих поруч систем (вібрації від сусідніх верстатів тощо));

- зниженням працездатності оператора;

- зміною характеристик апаратури або устаткування при їхній роботі у різних діапазонах досліджуваної величини.

Наприклад, у вимірювальному приладі (індикаторі) спостерігається «заїдання». Якщо попередній відлік проводився у верхній частині діапазону, то при подальших вимірюваннях прилад покаже завищене значення величини, якщо попереднє вимірювання виконувалося у нижній частині діапазону, то «заїдання» приладу приводить до заниженого показу.

При послідовному переході від низьких діапазонів до вищих кожен подальший результат виявиться заниженим, тобто спостерігатиметься систематична помилка постійної величини, яку важко виявити. При виконанні вимірювань випадковим чином при переході від більших значень до менших і від менших до більших кількість вимірювань буде однаковою. Отримані дані матимуть розсіювання, але групуватимуться навколо точних значень величини.

Рандомізація плану експерименту може бути досягнута за допомогою:

- 1) таблиці випадкових чисел;
- 2) «ігрового» методу;

3) введення спеціальних блоків.

«Ігровий» метод припускає, що обрані комбінації умов можна пронумерувати, а номери витягувати, як при жеребкуванні. Якщо червона гральна кістка дає одиниці, а зелена – десятки, то при випаданні 3 очок на зеленій кістці і одного очка на червоній виходить число 31. Комбінації умов можна пронумерувати від 11 до 16, від 21 до 26 і т. д. і план експерименту складати шляхом послідовного кидання гральних кісток.

При проведенні однофакторних експериментів необхідно враховувати вплив різних нерегульованих (зовнішніх) умов: стану випробуваної системи, працездатності оператора і т. д. Рівні зовнішніх факторів такого роду змінюються безперервно у часі, і їхній вплив краще за все компенсувати шляхом простої рандомізації плану експерименту.

Зовнішні фактори можуть бути дискретними (групи людей, верстатів, виробничі періоди, розміри партії матеріалів, різні дні тижня або пори року і т. д.) і вчиняти певні непрогнозовані впливи на результат експерименту.

Шляхом рандомізації можна звести до мінімуму їхній ефект за рахунок більш рівномірного розподілу рівнів цих факторів протягом усього експерименту. У разі, коли дискретні зовнішні фактори можуть бути ідентифіковані, можливо використання рандомізованих блоків.

**Приклад.** Необхідно вивчити роботу нового різця у виробничих умовах. Необхідно визначити оптимальну швидкість обробки, що забезпечує максимальний вихід продукції, щоб при цьому частка браку не перевищувала деякої заданої величини.

Проводимо однофакторний експеримент, фактором є швидкість, відгуком – вихід продукції R. У експерименті один зовнішній фактор – робітник, що обслуговує верстат. Вибір «середнього» робітника для проведення експерименту не має сенсу. Виберемо випадковим чином 4 робітники. Кожен працюватиме повну зміну при заданій швидкості обробки. Виберемо 4 швидкості з розрахунком, щоб кожен з робітників випробував їх усі. Позначивши швидкості цифрами 1, 2, 3, 4, а робітників – буквами А, В, С, D, отримаємо план експерименту (таблиця 3.1).

Таблиця 3.1 – План експерименту

Робіт ник	День тижня			
	понеділок	вівторок	середа	четвер
А	1	2	3	4
В	1	2	3	4
С	1	2	3	4
D	1	2	3	4

Такий план нездійснений. До кінця експерименту у робітника з'являється певний автоматизм, виробка збільшиться або ж знизиться при зникненні інтересу до експерименту.

Проведемо рандомізацію плану експерименту (таблиця 3.2).

Таблиця 3.2 – Рандомізований план експерименту «латинський квадрат»

Робітник	День тижня			
	понеділок	вівторок	середа	четвер
A	1	2	3	4
B	3	4	1	2
C	2	1	4	3
D	4	3	2	1

Одержуємо «латинський квадрат».

Удосконалимо план експерименту. Якщо кожен робітник протягом всього експерименту працюватиме на одному верстаті (а верстати можуть відрізнятись один від одного за точністю), то може з'явитися систематична помилка в результатах експерименту.

Позначивши верстати буквами W, X, Y, Z, задамо умови їхньої роботи так, щоб кожен робітник обслуговував даний верстат тільки один день і щоб на кожній швидкості обробки кожен верстат працював тільки один день. Одержуємо «греко-латинський квадрат» (таблиця 3.3).

Таблиця 3.3 – «Греко-латинський квадрат»

Робітник	День тижня			
	понеділок	вівторок	середа	четвер
A	1W	2X	3Z	4Y
B	3X	4W	1Y	2Z
C	2Y	1Z	4X	3W
D	4Z	3Y	2W	1X

### 3.2 Повний факторний експеримент (ПФЕ) [7]

Експеримент, в якому реалізуються всі можливі поєднання рівнів факторів, називається **повним факторним експериментом (ПФЕ)**.

Якщо кількість рівнів дорівнює 2, а кількість факторів –  $k$ , то кількість дослідів  $n=2^k$ . Межі варіювання факторами називають **верхнім** та **нижнім рівнями** і позначають відповідно +1 і -1 (або + і -).

Для переходу від натуральних значень факторів до значень  $\pm 1$  проводиться так зване кодування факторів за формулою:

$$X_i = \frac{X_j - X_{j0}}{J_j},$$



де  $X_i$  – кодоване значення фактору ( $\pm$ );  
 $X_j$  – натуральне поточне значення фактору;  
 $X_{j0}$  – натуральне значення нульового рівня:

$$X_i = \frac{X_n + X_e}{2},$$

де  $X_n$  – натуральне значення нижнього рівня;  
 $X_e$  – натуральне значення верхнього рівня;  
 $J_j$  – натуральне значення інтервалу варіювання:

$$J_j = \frac{X_e - X_n}{2}.$$

Якщо є 2 незалежних змінних  $x_1$  і  $x_2$ , кожна з яких варіюється на рівнях 1, то кількість необхідних дослідів:

$$n = 2^k = 2^3 = 8.$$

Матриця трифакторного експерименту наведена у таблиці 3.4.

Таблиця 3.4 – Матриця трифакторного експерименту

Номер досліджу	Змінні			Вихід
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	
1	-1	-1	-1	$Y_1$
2	+1	-1	-1	$Y_2$
3	-1	+1	-1	$Y_3$
4	+1	+1	-1	$Y_4$
5	-1	-1	+1	$Y_5$
6	+1	-1	+1	$Y_6$
7	-1	+1	+1	$Y_7$
8	+1	+1	+1	$Y_8$

Матриця планування повного факторного експерименту має наступні властивості:

1 Алгебраїчна сума елементів вектору-стовпця кожного фактору дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^n X_{ji} = 0,$$

де  $j$  – номер фактору.

2 Сума квадратів елементів кожного стовпця дорівнює кількості дослідів:

$$\sum_{i=1}^n X_{ji}^2 = n.$$

3 Сума почленних добутків будь-яких двох вектор-стовпців матриці дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^n X_{ji} X_{nj} = 0.$$

Ця властивість називається **ортогональністю** матриці планування. Точки в матриці планування підбираються так, щоб точність прогнозу значень параметру оптимізації була однаковою на рівних відстанях від центру експерименту і не залежала від напрямку. Ця властивість називається **ротатабельністю**.

Матриця повного факторного плану  $2^2$ , взаємодії факторів, що враховує ефект, наведена у таблиці 3.5.

Таблиця 3.5 – Матриця повного факторного плану  $2^2$

Номер досліджу	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_1X_2$	$Y$
1	+	-	-	+	$Y_1$
2	+	+	-	-	$Y_2$
3	+	-	+	-	$Y_3$
4	+	+	+	+	$Y_4$

МОДЕЛЬ ВИГЛЯДАЄ НАСТУПНИМ ЧИНОМ:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2.$$

КОЕФІЦІЄНТИ  $b_0, b_1, b_2, b_{12}$  ВИЗНАЧАЮТЬСЯ ЗА ФОРМУЛОЮ:

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ji} y_i}{n}; \quad J = 0, 1, \dots, K,$$

або

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4);$$

$$b_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{1i} y_i = \frac{1}{4}(-y_1 + y_2 - y_3 + y_4);$$

$$b_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{2i} y_i = \frac{1}{4} (-y_1 - y_2 + y_3 + y_4);$$

$$b_{12} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i} y_i = \frac{1}{4} (y_1 - y_2 - y_3 + y_4).$$

Вектори-стовпці  $x_1$  та  $x_2$  безпосередньо визначають умови експерименту, а  $x_0$  та  $x_1 x_2$  служать тільки для розрахунку коефіцієнтів  $b_0$  та  $b_{12}$ .

### 3.3 Дробовий факторний експеримент (ДФЕ) [7]

Із збільшенням кількості факторів різко зростає кількість дослідів повного факторного плану, а також число ступенів вільності  $f = N - q$  ( $N$  – кількість дослідів,  $q$  – кількість невідомих коефіцієнтів регресії).

Для лінійного рівняння регресії  $q = k + 1$ , де  $k$  – кількість факторів:

при  $k = 3$ :  $N = 8$ ;  $q = 4$ ;  $f = 4$ ;

при  $k = 5$ :  $N = 32$ ;  $q = 6$ ;  $f = 26$ .

**Для розрахунку невідомих коефіцієнтів регресії достатньо, щоб  $f = 1$ .**

**Метод дробових реплік** полягає в тому, що для знаходження математичного опису процесу використовується певна частина повного факторного плану ( $1/2$ ,  $1/4$  і т. д.), звана **дробовим факторним планом** (дробовою реплікою повного факторного плану).

Розрахунок коефіцієнтів регресії, перевірка їхньої значущості та адекватності математичної моделі здійснюються так само, як і при повному факторному плані.

**Приклад.** Повний факторний план  $2^4$  (для випадку  $k=4$ ) включає 16 точок. Для отримання моделі потрібно, як мінімум, 6 точок ( $q = 5$ ,  $f=1$ ). Існує ортогональний план, для якого кількість точок 6 т 16, – це для випадку  $k = 3$ .

Оскільки для лінійної моделі ефекти взаємодії беруться як нуль, можна скористатися будь-яким із стовпців вектору, що характеризують ефекти взаємодії, для четвертого фактору ( $x_1 x_2 x_3$  або  $-x_1 x_2 x_3$ ). Приймаючи для фактору  $x_4$  вектор-стовпець  $x_1 x_2 x_3$ , отримаємо план  $2^3$ . Цей план містить половину дослідів повного факторного плану, тобто є **напівреплікою плану  $2^4$**  і позначається  $2^{4-1}$  (таблиця 3.6).

Перед постановкою експерименту за дробовими репліками необхідно вирішити, яким ефектом взаємодії можна нехтувати без зайвого ризику. Приймаючи в розглянутому прикладі  $x_4 = x_1 x_2 x_3$  одержимо так зване **генеруюче співвідношення**, на основі якого генерується дробова репліка.

Таблиця 3.6 – Матриця  $2^{4-1}$ 

Номер досліджу	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4=x_1x_2x_3$
1	+	+	+	+
2	-	+	+	-
3	+	-	+	-
4	-	-	+	+
5	+	+	-	-
6	-	+	-	+
7	+	-	-	+
8	-	-	-	-

Після множення обох частин співвідношення на  $x_4$  одержимо  $x_4^2 = x_1x_2x_3x_4$  в лівій його частині одиничний вектор-стовпець:

$$I = x_1x_2x_3x_4. \quad (3.1)$$

Цей добуток називається **визначальним контрастом**.

Дане співвідношення дає можливість встановити те, що вирішує здатність дробової репліки, тобто знайти, які з коефіцієнтів рівняння регресії є незмішаними оцінками для відповідних генеральних коефіцієнтів.

При виборі напіврепліки  $2^{4-1}$  можливі 8 рішень:

- 1)  $x_4 = x_1x_2$ ; 2)  $x_4 = -x_1x_2$ ; 3)  $x_4 = x_2x_3$ ; 4)  $x_4 = -x_2x_3$ ;  
 5)  $x_4 = x_1x_3$ ; 6)  $x_4 = -x_1x_3$ ; 7)  $x_4 = x_1x_2x_3$ ; 8)  $x_4 = -x_1x_2x_3$ .

Вирішальна здатність напівреплік, отриманих за допомогою цих генеруючих співвідношень, є різною. Так, напіврепліки за співвідношеннями 1–6 мають по 3 фактори у визначальному контрасті, а напіврепліки 7 та 8 – по 4. Напіврепліки за співвідношеннями 7 та 8 мають максимальну роздільну здатність і називаються головними.

Проведемо послідовне множення визначального контрасту на  $x_j$  ( $j=1, 2, 3, 4$ ), при цьому маємо на увазі, що вектор  $x^2$  містить тільки +1:

$$x_1 = x_1^2x_2x_3x_4 = x_2x_3x_4; \quad x_2 = x_1x_3x_4; \quad x_3 = x_1x_2x_4; \quad x_4 = x_1x_2x_3. \quad (3.2)$$

Співвідношення (3.2) вказує на рівність визначальних стовпців вектора в матриці плану, що приводить до отримання змішаних оцінок коефіцієнтів моделі, розрахованих за їхньою допомогою:

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{234}, \quad b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{134}, \quad b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{124}, \quad b_4 \rightarrow \beta_4 + \beta_{123},$$

де  $b_i$  – вибіркова оцінка  $i$ -го коефіцієнта регресії;

$\beta_i$  – його дійсне значення (математичне чекання).

Оскільки потрібні ефекти зазвичай дорівнюють нулю, можна вважати, що коефіцієнти рівняння регресії, що оцінюють лінійні ефекти та змішані з коефіцієнтами при потрібних взаємодіях, практично є незмішаними оцінками відповідних дійсних значень коефіцієнтів при лінійних ефектах.

Помноживши обидві частини співвідношення (3.1) на  $x_i x_j$ , одержимо:

$$x_1 x_2 = x_3 x_4, \quad x_1 x_3 = x_2 x_4 \text{ і т.д.} \quad (3.3)$$

Із співвідношення (3.3) виходить, що коефіцієнти рівняння регресії при парних ефектах взаємодії факторів є *змішаними оцінками*.

Це означає, що, наприклад, коефіцієнт  $b_{12}$  може входити до рівняння регресії спільно з ефектами  $x_1 x_2$  або  $x_3 x_4$ . Обидва ці ефекти справляють рівний вплив на параметр оптимізації у досліджуваній сфері факторного простору. У цьому випадку вибір того чи іншого ефекту здійснюється з урахуванням фізичної природи досліджуваного об'єкта, технологічних факторів і завдань дослідження.

За умов відсутності апріорної інформації про ефекти взаємодії факторів прагнуть вибрати репліку з найбільшою роздільною здатністю, оскільки, наприклад, потрібні ефекти взаємодії факторів звичайно менш важливі, ніж парні, четверні – ніж потрібні і т. д.

### 3.4 Композиційний план [7]

Якщо за допомогою повного факторного експерименту не вдається отримати адекватний математичний опис досліджуваного процесу у формі багаточлена першого ступеня, його шукають у вигляді багаточлена другого ступеня. З цією метою використовуються, зокрема, композиційні плани Бокса-Уїлсона.

Розрізняють *ортogonalні* та *ротатабельні* плани другого порядку.

Плани другого порядку можуть бути отримані у результаті побудови планів першого порядку (додаванням деякої кількості дослідів в зоряних точках і в центрі плану), тоді їх називають *композиційними* (рисунок 3.1).

Кількість дослідів в такому випадку визначається за формулою:

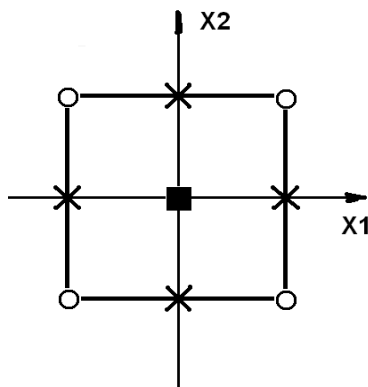
$$N = 2^k + 2k + 1,$$

де  $k$  – кількість факторів;

$2^k$  – кількість дослідів повного факторного плану;

$2k$  – кількість зоряних точок у факторному просторі, що має координати  $(\pm\alpha; 0; 0; \dots; 0); (0; \pm\alpha; \dots; 0); \dots; (0; 0; \dots; \pm\alpha);$

$\alpha$  – зоряне плече (зоряний крок).



о – повний факторний план, ■ – дослід в центрі плану,  
 \* – дослід в зоряних точках

Рисунок 4.1 – Схема дослідів композиційного плану для двох факторів.

Останній доданок 1 – дослід в центрі плану.

Значення зоряного кроку  $\alpha$ , вибрані з умови ортогональності матриці плану, знаходять залежно від кількості факторів  $k$ :

k	2	3	4	5
$\alpha$	1,0	1,215	1,414	1,547

Рівняння регресії при застосуванні композиційного ортогонального плану записується у вигляді:

$$y = b_0^* + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_kx_k + b_{12}x_1x_2 + \dots + b_{(k-1)k}x_{k-1}x_k + b_{11}x_1^* + \dots + b_{kk}x_k^*$$

де змінні

$$x_{ji}^* = x_{ji}^2 - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_{ji}^2$$

введені для того, щоб матриця плану була ортогональною і коефіцієнти регресії визначалися незалежно один від одного за наслідками дослідів ( $i$  – номер фактору,  $j$  – номер досвіду).

Рівняння регресії, записане у звичайній формі:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_kx_k + b_{12}x_1x_2 + \dots + b_{(k-1)k}x_{k-1}x_k + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + \dots + b_{kk}x_k^2.$$

Для його отримання знаходять:

$$b_0 = b_0^* - \frac{b_{11}}{N} \sum_{j=1}^N x_{ji}^2 - \dots - \frac{b_{kk}}{N} \sum_{j=1}^N x_{jk}^2.$$

У таблиці 3.7 подана матриця ортогонального плану для двох факторів

Таблиця 3.7 – Матриця ортогонального плану для двох факторів

Система дослідів	Номер дослідів	$X_1$	$X_2$	$X_1X_2$	$X_1^*$	$X_2^*$
Повний факторний план	1	-1	-1	+1	+0,33	+0,33
	2	+1	-1	-1	+0,33	+0,33
	3	-1	+1	-1	+0,33	+0,33
	4	+1	+1	+1	+0,33	+0,33
Досліди в зоряних точках	5	+1	0	0	+0,33	-0,67
	6	-1	0	0	+0,33	-0,67
	7	0	+1	+1	-0,67	+0,33
	8	0	-1	-1	-0,67	+0,33
Дослід в центрі плану	9	0	0	0	-0,67	-0,67

**Перевага композиційного ортогонального плану :**

- простота обчислень, що важливо при ручних розрахунках.

**Недоліки ортогонального плану:**

- коефіцієнти регресії оцінюються з різними помилками;
- значення параметру оптимізації мають різні дисперсії, що змінюються від точки до точки.

### 3.5 Ротатабельний план [7]

**Ротатабельний план** дозволяє одержувати точніший математичний опис поверхні відгуку порівняно з ортогональним планом. Це досягається завдяки збільшенню кількості дослідів у центрі плану та обґрунтованому вибору зоряного плеча  $\alpha$ . Основні характеристик ротатабельних планів наведені у таблиці 3.8.

Таблиця 3.8 – Основні характеристики ротатабельних планів

Кількість факторів	Кількість дослідів за схемою ПФЕ	Кількість дослідів у зоряних точках плану	Кількість дослідів у центрі плану	Загальна кількість дослідів	$\alpha$
2	4	4	5	13	1,414
3	8	6	6	20	1,68
4	16	8	7	31	2,0
5*	32	10	10	52	2,378
5**	16	10	6	32	2,0

\* ПФЕ; \*\* ДФЕ

Головна властивість ротатабельних планів – незалежність дисперсій передбаченого значення у від обертання координат плану. При цьому дисперсії однакові на рівних відстанях від центру плану.

Приклад ротатабельного плану для двох факторів наведений у таблиці 3.9.

*Таблиця 3.9 – Ротатабельний план для двох факторів*

Система дослідів	Номер дослідів	$X_1$	$X_2$	$X_1X_2$	$X_1^2$	$X_2^2$
Повний факторний план	1	-1	-1	+1	+0,33	+0,33
	2	+1	-1	-1	+0,33	+0,33
	3	-1	+1	-1	+0,33	+0,33
	4	+1	+1	+1	+0,33	+0,33
Досліди в зоряних точках	5	+1	0	0	+0,33	-0,67
	6	-1	0	0	+0,33	-0,67
	7	0	+1	+1	-0,67	+0,33
	8	0	-1	-1	-0,67	+0,33
Дослід у центрі плану	9	0	0	0	-0,67	-0,67



## ЛЕКЦІЯ 4. МЕТОДИКА ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ НАУКОВОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

*План.*

*14 Методи обробки результатів експерименту.*

*15 Методи графічної обробки результатів експерименту.*

*16 Методи підбору емпіричних формул.*

*17 Основи регресійного та кореляційного аналізу.*

*СРС:* приклади використання методів обробки результатів експерименту при дослідженні процесів та систем механічної обробки.

*Література:* [3, с. 277–310; 7, с. 58–66].

### *4.1 Методи обробки результатів експерименту*

До методів обробки результатів експерименту відносять:

- *методи графічної обробки результатів експерименту;*
- *методи підбору емпіричних формул;*
- *метод регресійного аналізу;*
- *метод кореляційного аналізу.*

Різні методи обробки результатів експерименту мають свої переваги та недоліки і, відповідно – області раціонального використання.

### *4.2 Методи графічної обробки результатів експерименту [7]*

При обробці результатів експериментів широко використовуються методи графічного зображення. Для графічного зображення, як правило, застосовують систему прямокутних координат. Після нанесення експериментальних точок на графік, проводять плавну лінію якомога ближче до цих точок (рис. 4.1, а, б).

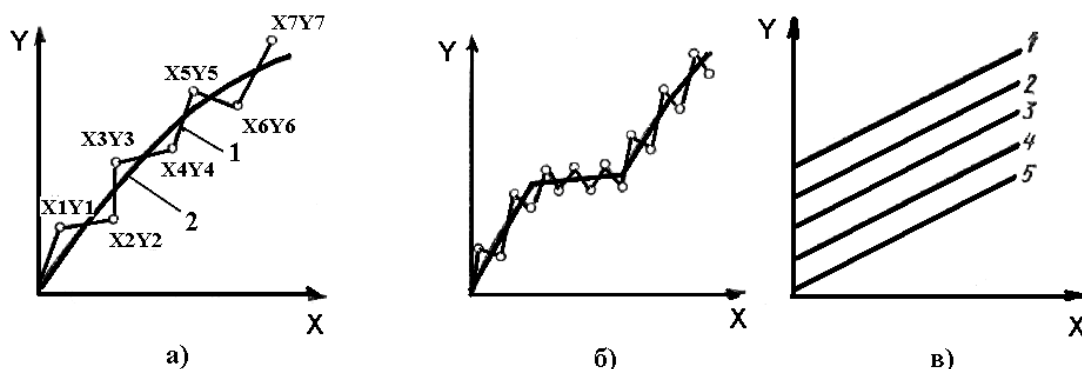
У разі потреби побудови графіка для 3-х змінних  $b=f(x,y,z)$ , застосовують *метод розділення змінних*.

Величина  $z$  набуває декілька послідовних значень від  $z_1$  до  $z_n$ , і будується графік  $y=f(x)$  при  $z_i = const$  (рис. 4.1, в).

Координатні сітки можуть бути рівномірними і нерівномірними. У рівномірних координатних сітках ординати і абсциси мають рівномірну шкалу. З нерівномірних координатних сіток найбільш поширені напівлогарифмічні, логарифмічні, імовірнісні (рис. 4.2).

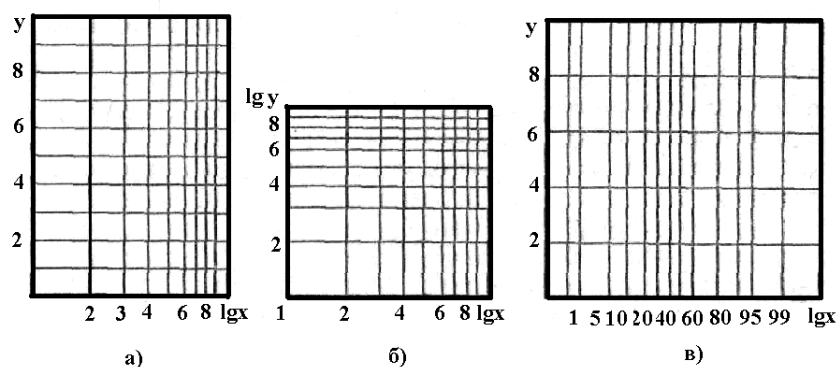
Для полегшення систематичних розрахунків складних теоретичних або емпіричних формул в певних межах вимірювання величин будують

номограми. Процес суттєво полегшується при використанні спеціальних пакетів прикладних програм (наприклад, MathCAD).



*a* - плавна залежність: 1 – крива за наслідками безпосередніх вимірювань; 2 – плавна крива; *б* - за наявності стрибка; *в* – при трьох змінних: 1 -  $z_5 = const$ ; 2 -  $z_4 = const$ ; 3 -  $z_3 = const$ ; 4 -  $z_2 = const$ ; 5 -  $z_1 = const$

Рисунок 4.1 – Графічне зображення функції  $y=f(x)$



*a* – напівлогарифмічна; *б* – логарифмічна; *в* – імовірнісна сітка

Рисунок 4.3 – Координатні сітки

### 4.3 Методи підбору емпіричних формул [7]

У процесі експериментальних досліджень виходить статистичний ряд вимірювань двох величин, коли кожному значенню функції  $y_1, y_2, \dots, y_n$  відповідає певне значення аргументу  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . На основі експериментальних даних можна підібрати вирази функції  $y=f(x)$ , які називають **емпіричними формулами**.

Процес **підбору емпіричних формул** складається з двох етапів.

**1-й етап.** Будується графік за експериментальними точками і вибирається орієнтовно вид формули.

**2-й етап.** Обчислюються параметри формул, які найкращим чином відповідали б прийнятій формулі.

Результати вимірювань багатьох явищ та процесів апроксимуються емпіричними рівняннями типу  $y=a+bx$ , де  $a, b$  – постійні коефіцієнти.

Значення  $a$  визначається з графіка (рис. 4.3), а значення  $b$  за формулою  $b = \operatorname{tg} \alpha = (y_i - a) / x_i$ , де  $x_i$  і  $y_i$  – крайні точки прямої.

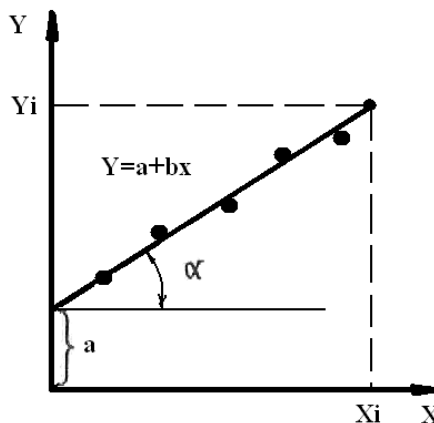


Рисунок 4.3 – Графічне визначення значень  $x$  і  $y$

Можна підставити у рівняння координати двох крайніх точок, і з двох рівнянь визначаються значення  $a$  та  $b$ .

Графічний метод вирівнювання може бути застосований у тих випадках, коли експериментальна крива на сітці прямокутних координат має вид плавної кривої (рисунок 4.4).

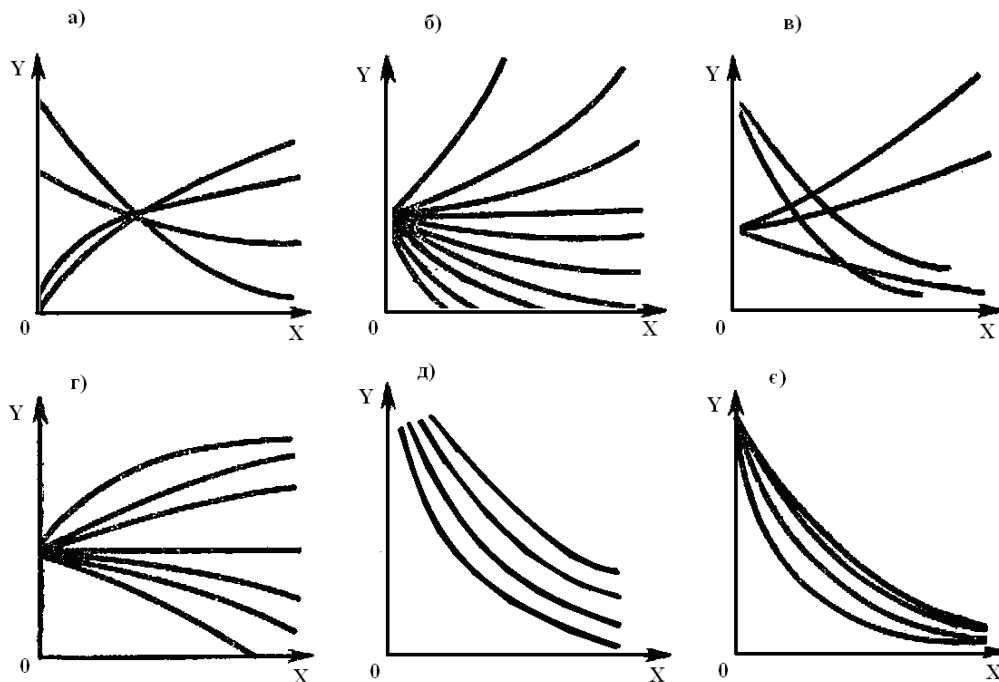


Рисунок 4.4 – Основні види графіків емпіричних формул

Якщо експериментальний графік має вигляд, показаний на рис. 4.4, а, то необхідно застосувати формулу  $y = ax^b$ . Замінюючи  $X = \lg x$  та  $Y = \lg y$ , одержимо  $Y = \lg a + bX$ . При цьому експериментальна крива перетворюється на пряму лінію на логарифмічній сітці.

Якщо експериментальний графік має вигляд, показаний на рис. 4.4, б, то необхідно застосувати формулу  $y = ae^{bx}$ . Замінюючи  $Y = lgy$ , одержимо  $Y = lga + bxlge$ . При цьому експериментальна крива перетворюється на пряму лінію на напівлогарифмічній сітці.

Якщо експериментальний графік має вигляд, показаний на рис. 4.4, в, то необхідно застосувати формулу  $y = c + ax^b$ . Якщо  $b$  задане, то беремо  $X = x^b$ , одержуємо пряму лінію на сітці прямокутних координат  $y = c + aX$ . Якщо  $b$  невідоме, тоді беремо  $X = lgx$  і  $Y = lg(y - c)$ ; тоді буде пряма лінія на логарифмічній сітці  $Y = lga + bX$ .

Необхідно обчислити  $c$ . Для цього за експериментальною кривою беруть 3 довільних точки  $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3 = \sqrt{x_1x_2}, y_3$  і обчислюють  $c$ :

$$c = \frac{y_1y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}.$$

Якщо експериментальний графік має вигляд, показаний на рис. 4.4, г, то необхідно застосувати формулу  $y = c + ae^{bx}$ . Шляхом заміни  $Y = lg(y - c)$  будуємо пряму на напівлогарифмічній сітці  $Y = lga + bxlge$ , де  $c$  визначається, як у попередньому випадку. Тільки  $x_3 = 0,5(x_1 + x_2)$ .

Якщо експериментальний графік має вигляд, показаний на рис. 4.4, д, то необхідно застосувати формулу  $y = a + b/x$ . Шляхом заміни  $x = 1/z$  одержуємо пряму лінію на сітці прямокутних координат  $y = a + bz$ .

Якщо експериментальний графік має вигляд, показаний на рис. 4.4, е, то необхідно застосувати формулу  $y = 1/(a + bx)$ . Якщо взяти  $y = 1/z$ , то  $z = a + bx$ , тобто одержуємо пряму лінію на сітці прямокутних координат.

Аналогічно рівнянню  $Y = \frac{1}{a+bx+cx^2}$  шляхом заміни  $y = 1/z$  можна надати вигляду  $z = a + bx + cx^2$ .

Складну ступеневу функцію можна перетворити: при  $lgy = z$ ;  $lga = p$ ;  $nlge = q$ ;  $mlge = r$  виходить залежність  $z = p + qx + rx^2$ .

При підборі емпіричних формул використовуються поліноми:

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots + A_nx^n,$$

де  $A_0, A_1, \dots, A_n$  – постійні коефіцієнти.

Для їхнього визначення можна використовувати **графічний метод** або **метод найменших квадратів**. Сутність методу – якщо всі вимірювання функцій  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , проведені з однаковою точністю, відповідають нормальному закону, то параметри досліджуваного рівняння визначаються з умови, при якій сума квадратів відхилень зміряних значень від розрахункових набуває найменшого значення.

Для знаходження невідомих параметрів  $a_1, a_2, \dots, a_n$  необхідно вирішити систему лінійних рівнянь:



$$r = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{[n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2][n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}}$$

При  $r=1$   $x$  і  $y$  пов'язані функціональним зв'язком (лінійним), тобто кожному значенню  $x$  відповідає тільки одне значення  $y$ . Якщо  $r < 1$ , то лінійного зв'язку не існує; якщо  $r=0$ , то лінійний зв'язок відсутній. При  $r < 0,5$  тісноту зв'язку вважають задовільною, при  $r=0,8 \dots 0,85$  тісноту зв'язку вважають доброю.

Для визначення відсотка розсіювання шуканої функції  $y$  щодо її середнього значення, визначуваного мінливістю фактору  $x$ , обчислюють **коефіцієнт детермінації**  $k_d = r^2$ .

Сутність **оцінки адекватності теоретичних рішень** полягає в зіставленні одержаної або запропонованої теоретичної функції  $y=f(x)$  з результатами вимірювань. У перевірці адекватності, тобто відповідності теоретичної кривої експериментальним даним, застосовують різні критерії згоди.

**Критерій Фішера.** Для встановлення адекватності необхідно розрахувати експериментальне значення критерію Фішера  $k_{фе}$  і порівняти його з теоретичним (табличним) значенням  $k_{фт}$ , що береться при необхідній довірчій імовірності  $p_d$  ( $p_d = 0,95$ ). Якщо  $k_{фе} < k_{фт}$  – модель адекватна, якщо  $k_{фе} \geq k_{фт}$  – модель неадекватна.

$$k_{фе} = D_a / D_{cp},$$

де  $D_a$  – дисперсія адекватності;

$D_{cp}$  – середня дисперсія всього експерименту.

$$D_a = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{im} - \bar{y}_{ie})^2}{n-d},$$

$$D_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (y_{im} - y_{ie})^2}{mn},$$

де  $y_{im}$  – теоретичне значення функції для кожного вимірювання;

$\bar{y}_{ie}$  – експериментальне значення функції;

$y_{ie}$  – середнє експериментальне значення функції з  $m$  серій вимірювань;

$n$  – кількість вимірювань в одному досліді (однієї серії або кількість дослідів);

$d$  – кількість коефіцієнтів рівняння теоретичної регресії.

Значення  $k_{\phi m}$  береться за таблицею для довірчої імовірності 0,95 і числа ступенів вільності  $q_1 = n - d$ ;  $q_2 = n(m - 1)$ .

У рівнянні  $y_{im}$  обчислюють за теоретичною регресією для фактора  $x_i$   
 $\overline{y_{ie}}$  – як середнє з  $m$  серій вимірювань

$$\overline{y_{ie}} = \frac{1}{m}(y_{1e} + y_{2e} + \dots + y_{me}).$$

Критерій Фішера зазвичай застосовується для визначення адекватності малих вибірок.

У великих вибірках доцільно застосовувати **критерії Пірсона, Романовського, Колмогорова**.

**Критерій Пірсона.** Відповідно до цього критерію гіпотеза про закон розподілу підтверджується, якщо дотримується умова:

$$P(\chi^2, q) > \alpha = 1 - \varphi(x),$$

де  $\alpha = 1 - \varphi(x)$  – рівень значущості ( $\alpha = 0,10$ );

$\chi$  – критерій згоди Пірсона;

$q$  – число ступенів вільності ( $q = m - s$ );

$m$  – кількість груп (серій, розрядів) великої вибірки або кількість вимірювань в одній серії при аналізі односерійного експерименту;

$s$  – кількість використовуваних зв'язків (констант).

$$\chi^2 = \sum_1^m (y_{ei} - y_{mi})^2 / y_{mi},$$

де  $y_{ei}$ ,  $y_{mi}$  – кількість вимірювань (частота) в кожній групі серій відповідно за даними експерименту і теоретичної кривої.

**Критерій Романовського** визначається відношенням

$$k_p = (\chi^2 - q) / \sqrt{2q}.$$

Число ступенів вільності  $q = m - s$  (визначається аналогічно, як і для критерію Пірсона). Адекватність задовольняється при  $k_p < 3$ .

**Критерій Колмогорова**  $k_k$  застосовується для оцінки адекватності також при великій статистичній вибірці  $N$ .

Статистичну криву частот перетворюють на статистичну інтегральну функцію, знаходять найбільшу різницю частот між експериментальною статистичною інтегральною кривою і відповідною теоретичною інтегральною кривою:

$$D_o = \max(\Sigma y_{ei} - \Sigma y_{mi}).$$

Потім обчислюють  $\lambda = D_o \sqrt{N}$  і за значенням  $\lambda$  за таблицями знаходять вірогідність  $p(\lambda)$ . Адекватність задовольняється, якщо  $p(\lambda) > 0,05$ , тобто експериментальні дані підтверджують теоретичний розподіл.



## ЛЕКЦІЯ 5. МЕТОДИ ТЕОРЕТИЧНИХ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

*План.*

*18 Мета та завдання теоретичних наукових досліджень.*

*19 Структурні компоненти та стадії теоретичних наукових досліджень.*

*20 Математичні методи та математичні моделі у теоретичних наукових дослідженнях.*

*СРС: приклади використання математичних методів та математичних моделей у теоретичних наукових дослідженнях процесів та систем механічної обробки.*

*Література: [3, с. 130–208].*

### *5.1 Мета та завдання теоретичних наукових досліджень*

*Метою теоретичних наукових досліджень* є виділення в процесі синтезу знань зв'язків між досліджуваним об'єктом і навколишнім середовищем, пояснення й узагальнення результатів емпіричного дослідження, виявлення загальних закономірностей.

*Завданнями теоретичного дослідження* є:

- узагальнення результатів експерименту, знаходження загальних закономірностей шляхом обробки даних;
- розширення результатів дослідження на ряд подібних об'єктів без повторення всього обсягу досліджень;
- підвищення надійності експериментального дослідження об'єкту (обґрунтування параметрів і умов спостереження, точності вимірювань).

Теоретичні дослідження включають:

- аналіз фізичної сутності процесів, явищ;
- формулювання гіпотези дослідження;
- розробку фізичної моделі;
- проведення математичного дослідження;
- аналіз теоретичних рішень;
- формулювання висновків.

Якщо не вдається виконати математичне дослідження, то формулюється робоча гіпотеза у словесній формі з використанням графіків, таблиць тощо. Проте у технічних науках необхідно прагнути до використання математичної формалізації висунутих гіпотез і виводів.

## 5.2 Структурні компоненти та стадії теоретичних наукових досліджень

Структурно будь-яке завдання включає умови та вимоги (рисунок 5.1).

**Умови** – це визначення інформаційної системи, з якої варто виходити при вирішенні завдання.

**Вимоги** – це мета, до якої слід прагнути в результаті вирішення завдання.

Умови та вимоги можуть бути **вихідними, залученими** та **шуканими**.

**Вихідні умови** задаються у первісному формулюванні завдання (**вихідні дані**). Якщо їх недостатньо для вирішення завдання, то дослідник змушений залучати нові дані – **залучені**.

**Шукані дані** або **шукані умови** – це залучені умови, які потрібно відшукати в процесі вирішення завдання.

Процес проведення теоретичних досліджень складається з декількох **стадій**.

**Оперативна стадія** включає перевірку можливості усунення технічного протиріччя, оцінку можливих змін у середовищі, що оточує об'єкт, аналіз можливості перенесення вирішення задач з інших галузей знання.

Друга стадія дослідження є **синтетичною**. Під час цієї стадії визначається вплив зміни однієї частини об'єкту на побудову інших його частин, визначаються необхідні зміни інших об'єктів, оцінюється можливість застосування знайденої технічної ідеї при вирішенні інших задач.

Виконання названих попередніх стадій дає можливість підійти до **стадії постановки задачі**, у процесі якої визначається кінцева мета вирішення задачі, обирається найбільш ефективний шлях її вирішення, визначаються необхідні кількісні показники.

Постановка завдання є найважчою частиною її вирішення. Перетворення на початку розпливчастого формулювання задачі на чітке, що полегшує її вирішення.

**Аналітична стадія** передбачає визначення ідеального кінцевого результату, виявляються перешкоди, що заважають отриманню ідеального результату, визначаються умови, що забезпечують отримання ідеального результату з метою знайти, за яких умов зникне «перешкода».

Теоретичне дослідження завершується формуванням **теорії**, не обов'язково пов'язаним з побудовою її математичного апарату. Теорія проходить у своєму розвитку різні стадії від якісного пояснення та кількісного вимірювання процесів до їхньої формалізації та залежно від стадії може бути представлена як у вигляді якісних правил, так і у вигляді математичних рівнянь (співвідношень).

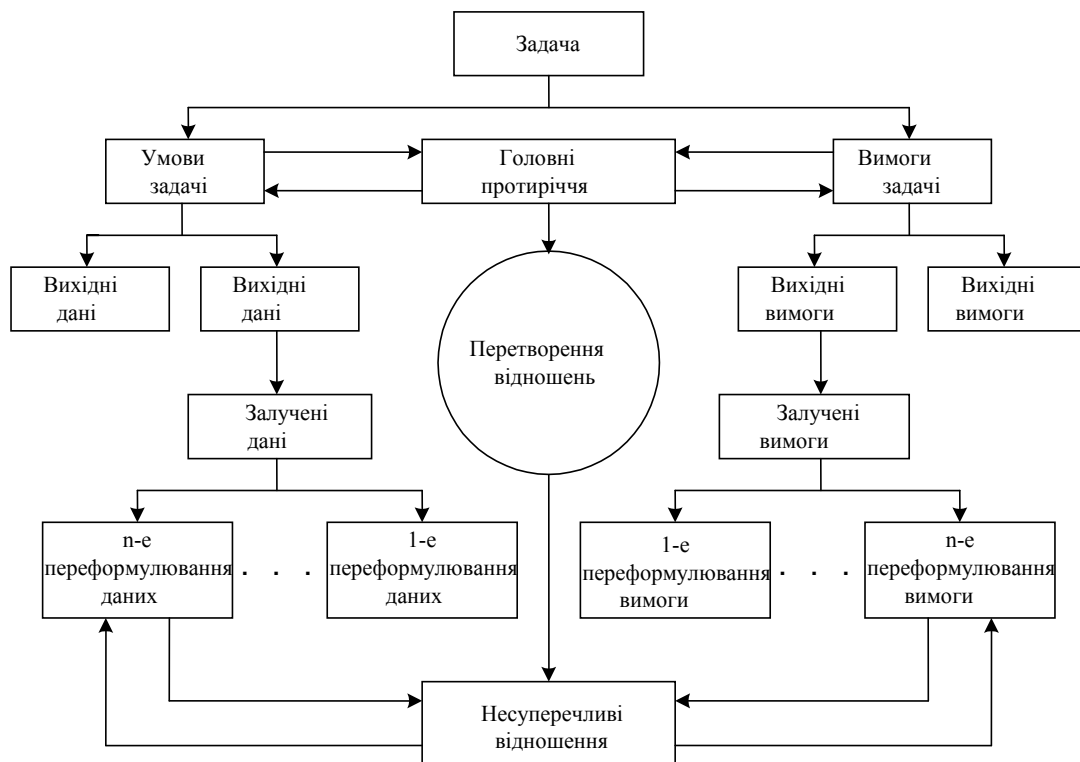


Рисунок 5.1 – Структурні компоненти вирішення задачі

### 5.3 Математичні методи та математичні моделі у теоретичних наукових дослідженнях

Рішення практичних задач математичними методами послідовно здійснюється шляхом **математичного формулювання задачі** (розробки математичної моделі), **вибору методу проведення дослідження** отриманої математичної моделі, **аналізу отриманих результатів**.

**Математичне формулювання задачі** зазвичай представляється у вигляді чисел, геометричних образів, функцій, систем рівнянь тощо.

**Математична модель** являє собою систему математичних співвідношень – формул, функцій, рівнянь, систем рівнянь, що описують ті чи інші сторони досліджуваного об'єкту, явища, процесу.

На етапі вибору типу математичної моделі за допомогою аналізу даних пошукового експерименту встановлюють: лінійність або нелінійність, динамічність або статичність, стаціонарність або нестаціонарність, а також ступінь детермінованості досліджуваного об'єкту або процесу.

Встановлення загальних характеристик об'єкту дозволяє вибрати математичний апарат, на базі якого будується математична модель. Вибір математичного апарату може бути здійснений у відповідності зі схемою, представленою на рисунку 5.2.

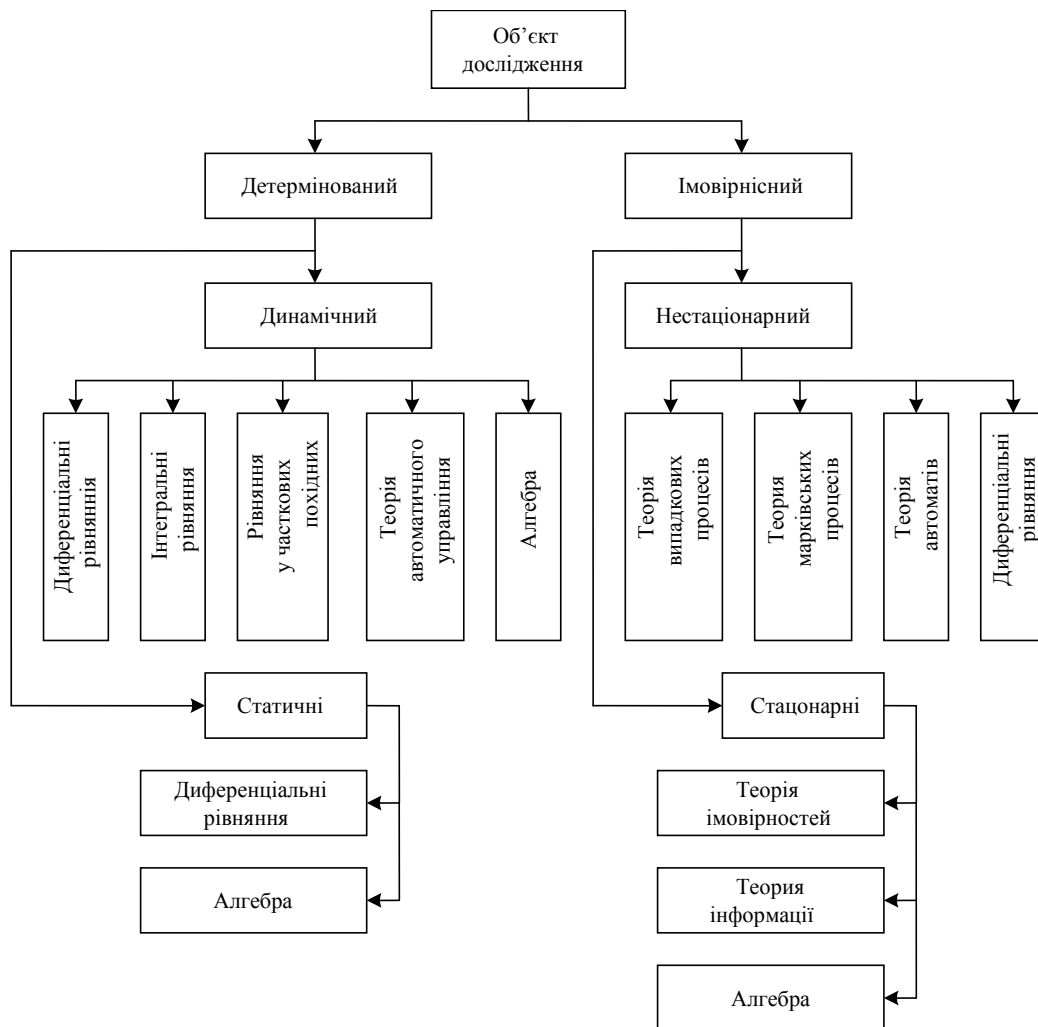


Рисунок 5.2 – Математичний апарат для побудови математичної моделі

Як видно з даної схеми, вибір математичного апарату не є однозначним.

Для опису складних об'єктів з великою кількістю параметрів можливою є розбивка об'єкту на елементи (підсистеми), встановлення ієрархії елементів та опис зв'язків між ними на різних рівнях ієрархії.

Особливе місце на етапі вибору типу математичної моделі займає опис перетворення вхідних сигналів у вихідні характеристики об'єкту.

Якщо на попередньому етапі було встановлено, що об'єкт є статичним, то побудова функціональної моделі здійснюється за допомогою алгебраїчних рівнянь. При цьому крім найпростіших алгебраїчних залежностей використовуються регресійні моделі та системи алгебраїчних рівнянь.

Якщо характер зміни досліджуваного показника заздалегідь відомий, то число можливих структур алгебраїчних моделей різко скорочується і перевага віддається тій структурі, що виражає найбільш загальну закономірність або загальновідомий закон.

Якщо характер зміни досліджуваного показника заздалегідь невідомий, то ставиться пошуковий експеримент. Перевага віддається тій

математичній формулі, що дає найкращий збіг з даними пошукового експерименту.

Результати пошукового експерименту та апріорний інформаційний масив дозволяють встановити схему взаємодії об'єкту із зовнішнім середовищем за співвідношенням вхідних та вихідних величин.

У принципі можливе встановлення чотирьох *схем взаємодії*:

– однорозмірно-одновимірна схема (рисунок 5.3, а) – на об'єкт впливає тільки один фактор, а його поведінка розглядається за одним показником (один вихідний сигнал);

– однорозмірно-багатовимірна схема (рисунок 5.3, б) – на об'єкт впливає один фактор, а його поведінка оцінюється за кількома показниками;

– багатовимірно-одновимірна схема (рисунок 5.3, в) – на об'єкт впливає кілька факторів, а його поведінка оцінюється за одним показником;

– багатовимірно-багатовимірна схема (рисунок 5.3, г) – на об'єкт впливає безліч факторів і його поведінка оцінюється за безліччю показників.

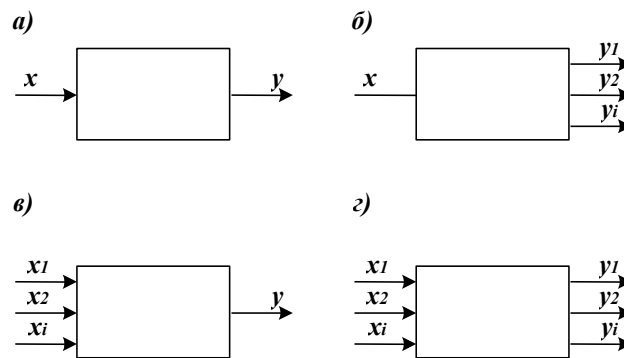


Рисунок 5.3 – Схеми взаємодії об'єкту із зовнішнім середовищем

Процес вибору математичної моделі об'єкту завершується її попереднім контролем.

При цьому здійснюються наступні *види контролю*: розмірностей; порядків; характеру залежностей; екстремальних ситуацій; граничних умов; математичної замкненості; фізичного сенсу; стійкості моделі.

**Контроль розмірностей** зводиться до перевірки виконання правила, згідно з яким прирівнюватися та складатися можуть тільки величини однакової розмірності.

**Контроль порядків** спрямований на спрощення моделі. При цьому визначаються порядки величин, що складаються, і явно малозначущі доданки відкидаються.

**Контроль характеру залежностей** зводиться до перевірки напрямку та швидкості зміни одних величин при зміні інших. Напрямок й швидкість, що випливають із математичної моделі, повинні відповідати фізичному сенсу задачі.

**Контроль екстремальних ситуацій** зводиться до перевірки наочного змісту рішення при наближенні параметрів моделі до нуля або до нескінченності.

**Контроль граничних умов** полягає в тому, що перевіряється відповідність математичної моделі граничним умовам, що впливають з сенсу задачі. При цьому перевіряється, чи дійсно граничні умови поставлені та враховані при побудові шуканої функції і чи ця функція насправді задовольняє таким умовам.

**Контроль математичної замкненості** зводиться до перевірки того, чи дає математична модель однозначне рішення.

**Контроль фізичного сенсу** зводиться до перевірки фізичного сенсу проміжних співвідношень, використовуваних при побудові математичної моделі.

**Контроль стійкості моделі** складається в перевірці того, що варіювання вихідних даних у рамках наявних даних про реальний об'єкт не призведе до істотної зміни рішення.

## ЛЕКЦІЯ 6.

### МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ У ПРАКТИЦІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ТА ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

#### *План.*

*1 Загальні поняття про математичне моделювання у практиці дослідження технічних об'єктів та технологічних процесів.*

*2 Вимоги до математичних моделей.*

*3 Класифікація математичних моделей.*

*4 Послідовність розробки математичних моделей технічних об'єктів.*

*5 Класифікація задач при розробці математичних моделей технічних об'єктів*

*СРС:* приклади використання математичного моделювання у практиці дослідження систем та процесів механічної обробки.

*Література:* [5, с. 35–48; 6, с. 27–50; 9, с. 67–81; 10, с. 4–7].

#### *6.1 Загальні поняття про математичне моделювання у практиці дослідження технічних об'єктів та технологічних процесів.*

При вирішенні завдань інженерного проектування технічних об'єктів та дослідження процесів у технологічних системах широко використовується моделювання. *Моделювання* технічних об'єктів та процесів у них полягає у побудові *натурної* або *математичної моделі*, відповідно розрізняють *натурне* та *математичне моделювання*. Метою побудови моделі є відображення, дослідження або прогнозування властивостей об'єкту, що моделюється.

*Натурне моделювання* об'єкту є доволі витратним та виконується у випадку, якщо неможливо побудувати його математичну модель. У інших випадках виконують *математичне моделювання* об'єкту.

Ключовим поняттям математичного моделювання є поняття математичної моделі. *Математична модель* – сукупність математичних об'єктів (чисел, змінних, матриць, множин, точок, геометричних фігур тощо) та відношень між ними, яка відображає деякі властивості фізичного об'єкту, що моделюється, та створюється з метою дослідження об'єкту.

Кількість математичних моделей для одного і того ж об'єкту є необмеженою, оскільки моделі можуть відображати різні елементи або ознаки об'єкту з різним ступенем деталізації.

На кожному ієрархічному рівні процесу проектування або дослідження використовуються свої математичні моделі, що відповідає принципу *блочно-ієрархічного представлення*

проектованих або досліджуваних об'єктів та пояснюється прагненням спростити моделі.

При математичному моделюванні більшості технічних об'єктів виділяють наступні *ієрархічні рівні*:

- *мікрорівень*;
- *макрорівень*;
- *метарівень*.

Особливістю *математичних моделей на мікрорівні* є відображення фізичних процесів, що відбуваються у непереривних просторі та часі. Типові *математичні моделі на мікрорівні* – *системи диференціальних рівнянь у часткових похідних (ДРЧП)*, що описують процеси у суцільному середовищі з заданими граничними умовами. У цих моделях незалежними параметрами є просторові координати та час  $t$ . За допомогою ДРЧП розраховуються значення просторових координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  після дії механічних напружень та деформацій, тисків, температур. Такі моделі використовуються для моделювання окремих деталей. Їхнє використання у багатокомпонентних системах та складальних вузлах обмежене оперативною пам'яттю та машинним часом обчислювальної машини.

При математичному моделюванні на макрорівні здійснюється укрупнене розбиття простору за функціональною ознакою. *Математичні моделі на макрорівні* представляють у вигляді систем *звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР)* з заданими початковими умовами. Незалежною змінною у моделях на макрорівні виступає зазвичай час  $t$ , а залежні від нього змінні (сили та швидкості механічних систем, тиск та витрати гідравлічних систем, напруги та сили струму електричних систем) характеризують стан укрупнених *елементів простору*. За допомогою математичних моделей на макрорівні досліджують як стаціонарні, так і динамічні (нестаціонарні) стани об'єктів. Моделі для стаціонарних станів об'єктів при цьому можна представити у вигляді систем алгебраїчних рівнянь. Зі зростанням числа елементів та, відповідно, порядків систем рівнянь можливості розв'язання задач на основі математичних моделей макрорівня звужуються, тому необхідним є перехід до наступного ієрархічного рівня – метарівня.

Об'єктом математичного моделювання на метарівні є складні пристрої та комплекси. Для побудови *математичної моделі на метарівні* використовують методи *теорії автоматичного управління, планування експериментів, математичної логіки, теорії масового обслуговування*. Для об'єктів, що є предметом досліджень теорії автоматичного управління, можливе використання математичного апарату макрорівня, для об'єктів, є предметом теорії масового обслуговування – методів подієвого моделювання.



## 6.2 Вимоги до математичних моделей

До математичних моделей висуваються наступні **вимоги**:

1) **точність** – ступінь відповідності значень параметрів реального об'єкту та значень тих же параметрів, розрахованих за допомогою оцінюваної математичної моделі. Нехай властивості, що відображаються у математичній моделі, оцінюються вектором підсумкових параметрів  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ . Позначивши справжнє та розраховане за допомогою моделі значення  $j$ -го підсумкового параметру через  $y_{jспр}$  та  $y_{jм}$  відповідно, можна визначити відносну похибку  $\varepsilon_j$  розрахунку параметру  $y_j$  за формулою:

$$\varepsilon_j = \frac{y_{jм} - y_{jспр}}{y_{jспр}}$$

При зведенні векторної оцінки до скалярної величини використовують норму вектору  $\varepsilon_j$ , наприклад:

$$\varepsilon_M = \|\varepsilon\| = \max_{j \in [1; m]} \varepsilon_j.$$

2) **адекватність** – властивість моделі відображати властивості об'єкту з похибкою, не вищою за задану. Оцінюється областю адекватності  $OA$  – обмеженою областю зміни вектору зовнішніх параметрів, у якій похибка значень змінних не перевищує заданої постійної величини  $\delta$ :

$$OA = \{Q | \varepsilon_M \leq \delta\}; \delta > 0;$$

3) **універсальність** – можливість застосувати модель для аналізу більш чи менш чисельної групи однотипних об'єктів;

4) **економічність** – характеризується витратами машинного часу  $T_M$  та пам'яті  $P_M$  на реалізацію моделі.

Вимоги високої точності, універсальності, широкої адекватності моделі, з одного боку, та її економічності, з іншого боку, суперечать одна одній, що вимагає компромісу між ними.

## 6.3 Класифікація математичних моделей.

Математичні моделі технічних об'єктів класифікуються:

- 1) за характером властивостей об'єкту, що відображаються – на **структурні** та **функціональні моделі**;
- 2) за належністю до ієрархічного рівня – на **математичні моделі мікро-, макро- та метарівня**;
- 3) за ступенем деталізації опису всередині одного рівня – на **повні та макро-моделі**;
- 4) за способом представлення властивостей об'єкту – на **аналітичні, алгоритмічні та імітаційні моделі**.
- 5) за способом отримання моделі – на **теоретичні та емпіричні моделі**.

**Структурні** математичні моделі слугують для відображення структурних властивостей об'єкту та поділяються на **топологічні** та **геометричні**.

**Топологічні** моделі відображають склад та взаємні зв'язки елементів об'єкту та використовуються у задачах компонування обладнання, розміщення деталей, проектування технологічних процесів. Вони можуть мати форму графів, матриць тощо.

**Геометричні** моделі відображають геометричні властивості об'єктів та використовуються у задачах конструювання. Серед геометричних моделей виділяють: **аналітичні** (рівняння поверхонь ліній в основному для площин та поверхонь другого порядку), **алгебраїчні** (системи логічних виразів, які відображають умови належності точок до внутрішніх областей тіл), **каркасні** (сітки, що відображають скінченну множину точок або кривих на модельованій поверхні); **канонічні** (множини параметрів, що однозначно визначають геометричний об'єкт та мають простий зв'язок з формою, наприклад координати вершин для багатокутника).

**Функціональні** математичні моделі призначені для відображення фізичних та інформаційних процесів, що відбуваються у об'єкті при його функціонуванні або виготовленні (зазвичай системи рівнянь, що пов'язують між собою фазові змінні, внутрішні, зовнішні та підсумкові параметри об'єкту).

**Повні** математичні моделі – моделі, в яких фігурують фазові змінні, що характеризують стан усіх елементів об'єкту.

**Макромоделі** – моделі, у яких відображений стан об'єкту при укрупненому виділенні його елементів.

**Аналітичні** математичні моделі передбачають явне вираження підсумкових параметрів як функцій вхідних та внутрішніх параметрів об'єкту. Такі моделі, як правило, передбачають прийняття суттєвих припущень, що знижує точність та зменшує область адекватності моделі.

**Алгоритмічні** математичні моделі відображають зв'язки вихідних параметрів з внутрішніми та зовнішніми параметрами об'єкту у вигляді алгоритму обчислення вихідних параметрів.

**Імітаційні** математичні моделі – алгоритмічні моделі, що відображають поведінку досліджуваного об'єкту у часі при заданні

зовнішніх дій на об'єкт (модель динамічних об'єктів у вигляді методу диференціальних рівнянь).

**Теоретичні** математичні моделі створюються у результаті теоретичного дослідження процесів та закономірностей, притаманних розглянутому класу об'єктів та явищ.

**Емпіричні** математичні моделі створюються у результаті вивчення зовнішніх проявів властивостей об'єкту за допомогою вимірювань фазових змінних на зовнішніх входах та виходах та обробки результатів експериментальних досліджень.

#### **6.4 Послідовність розробки математичних моделей технічних об'єктів.**

**Процедура розробки математичної моделі** об'єкту у загальному випадку передбачає наступні послідовно виконувані **проектні операції (проектні задачі)**:

1 **Вибір властивостей об'єкту, що підлягають відображенню в моделі** (виконання проектної процедури базується на аналізі можливих застосувань моделі та визначає ступінь її універсальності).

2 **Збирання вихідної інформації про вибрані властивості об'єкту** (виконання проектної процедури базується на наявних досвіді та знаннях розробника, а також літературних даних, описах прототипів та ін.).

3 **Синтез структури математичної моделі.** Під **структурою математичної моделі** розуміємо загальний вигляд математичних співвідношень без конкретних числових значень **параметрів моделі**.

4 **Розрахунок числових значень параметрів математичної моделі.** У ході розрахунку забезпечується мінімізація похибки моделі заданої структури.

5 **Оцінювання точності та адекватності розробленої математичної моделі.**

#### **6.5 Класифікація задач при розробці математичних моделей технічних об'єктів.**

Увесь спектр задач, що вирішуються при розробці математичних моделей технічних об'єктів, поділяються на дві великі групи:

- 1) **задачі синтезу;**
- 2) **задачі аналізу.**

Задачі **синтезу математичних моделей** зводяться до **створення проекту технічного об'єкту** (або його опису), задачі **аналізу** – до **оцінювання розробленого проекту об'єкту**, тобто до визначення його властивостей та дослідження працездатності.

Задачі синтезу математичних моделей поділяються на задачі **структурного синтезу** та задачі **параметричного синтезу**.

До задач **структурного синтезу** відносять задачі визначення структури, переліку елементів об'єкту, їхніх типів та способів зв'язку між ними.

До задач **параметричного синтезу** належать задачі визначення числових значень параметрів елементів технічного об'єкту при заданих структурі та умовах працездатності об'єкту.

Задачі аналізу математичних моделей поділяються на задачі **одноваріантного аналізу** та задачі **багатоваріантного аналізу**.

До задач **одноваріантного аналізу** відносять задачі, у яких вимагається виконати одноразове визначення значень вихідних параметрів моделі при заданих значеннях внутрішніх та зовнішніх параметрів.

До задач **багатоваріантного аналізу** відносять задачі, що передбачають багаторазове розв'язання рівнянь або систем рівнянь математичної моделі з наступним порівнянням отриманих варіантів рішень (власне кажучи – це багаторазове повторення розв'язання задачі одноваріантного аналізу).

Загальна схема класифікації **типових проектних процедур (задач)** при розробці математичних моделей наведена на рисунку 6.1. Проектна процедура називається типовою, якщо вона призначена для багаторазового використання при проектуванні багатьох типів технічних об'єктів.

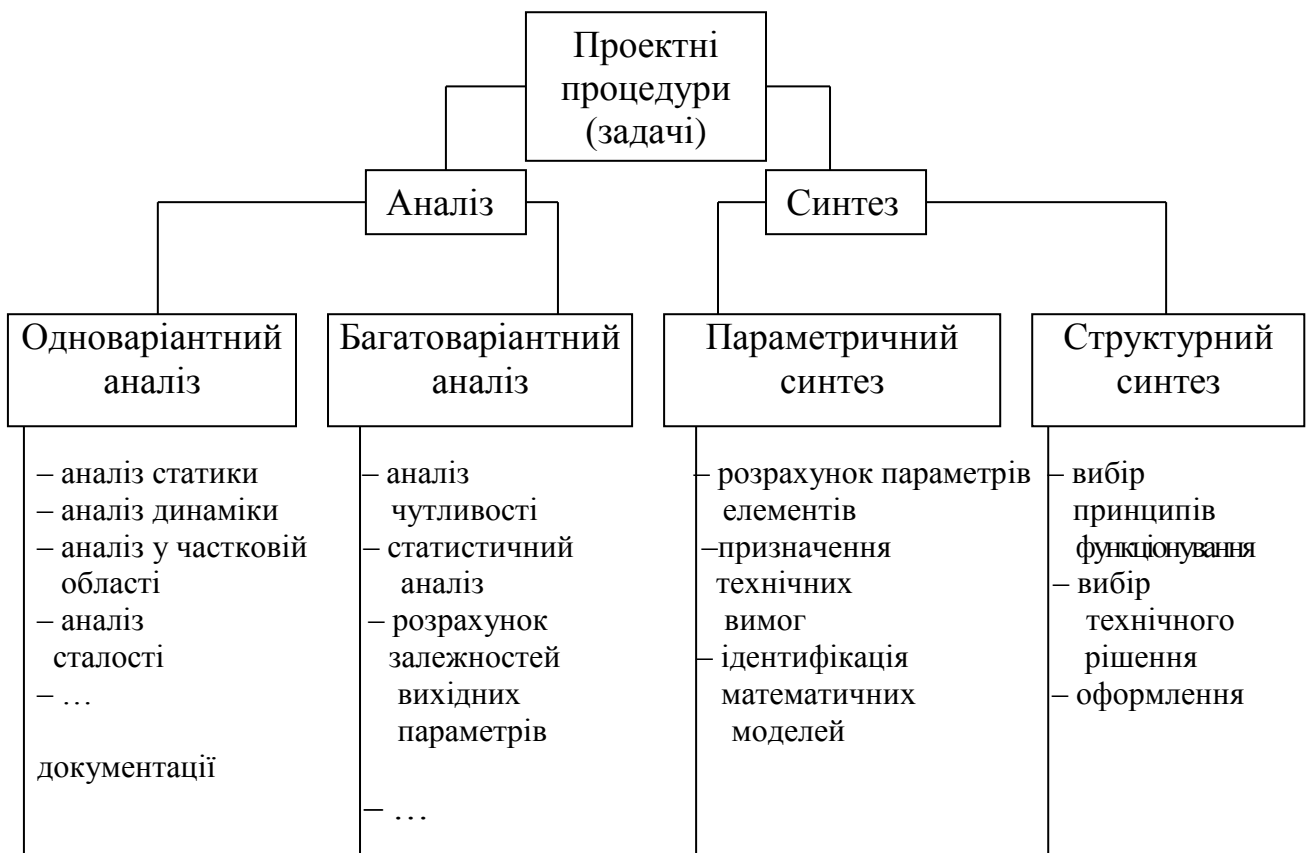


Рисунок 6.1 – Загальна схема класифікації типових проектних процедур (задач) при розробці математичних моделей технічних об'єктів

## ЛЕКЦІЯ 7.

### МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В ЗАДАЧАХ АНАЛІЗУ ТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ТА ПРОЦЕСІВ У ТЕХНОЛОГІЧНИХ СИСТЕМАХ

*План.*

*6 Загальна схема перетворення математичних моделей в процесі розв'язання задач аналізу технічних об'єктів.*

*7 Практика використання математичних моделей в задачах аналізу технічних об'єктів та процесів у технологічних системах.*

*СРС:* приклади використання математичних моделей в задачах аналізу процесів та систем механічної обробки.

*Література:* [4, с. 46–69].

*7.1 Загальна схема перетворення математичних моделей в процесі розв'язання задач аналізу технічних об'єктів.*

Реалізація математичних моделей різних ієрархічних рівнів у комп'ютерному середовищі передбачає **вибір числового методу та перетворення рівнянь** у відповідності з особливостями обраного методу. Кінцева мета перетворень – отримання робочої розрахункової програми у вигляді послідовності елементарних дій (арифметичних та логічних операцій), що реалізуються командами обчислювальної машини. Усі вказані перетворення вихідної математичної моделі на послідовність елементарних дій обчислювальна машина виконує автоматично за спеціальними програмами, що створюються інженерами-розробниками САПР. Інженер-користувач САПР має лише вказати, які програми з наявних він хоче використати. Загальна схема перетворення математичних моделей, що належать до різних ієрархічних рівнів моделювання, наведена на рисунку 7.1.

*Гілки 1* на рисунку 7.1 відповідають **постановці задачі**, що належить до **мікрорівня**, як **крайової**, частіше за все у вигляді **диференціальних рівнянь у часткових похідних (ДРЧП)**. Числові методи розв'язання ДРЧП базуються на **дискретизації змінних та алгебраїзації задачі**.

**Дискретизація змінних** полягає у заміні неперервних змінних скінченною множиною їхніх значень.

**Алгебраїзація задачі** полягає у заміні похідних алгебраїчними співвідношеннями.

При розв'язанні ДРЧП використовують різні способи дискретизації змінних та алгебраїзації задачі. Ці способи становлять сутність **методів числового розв'язання**; більшість використовуваних способів належать або до **методів скінченних різниць (МСР)**, або до методів **скінченних**

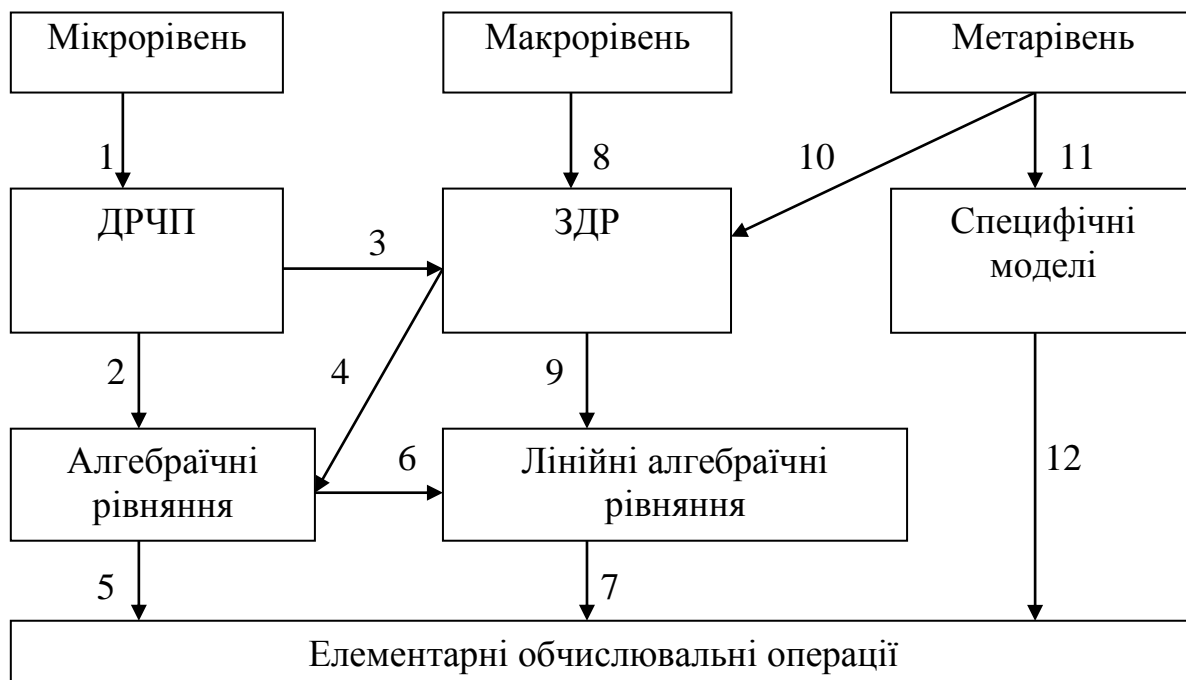


Рисунок 7.1 – Загальна схема перетворення математичних моделей у процесі отримання робочих програм аналізу

*елементів (МСЕ)*. Якщо ДРЧП *стаціонарне* (тобто описує статичні стани), то дискретизація та алгебраїзація перетворює ДРЧП на систему *алгебраїчних рівнянь*, в загальному випадку *нелінійних* (гілка 2 на рис. 7.1). Якщо ДРЧП *нестаціонарне* (тобто описує змінні у часі та просторі поля змінних), то дискретизацію та алгебраїзацію можна уявити такою, що складається з двох етапів:

- 1) *усунення похідних за просторовими координатами* (гілка 3);
- 2) *усунення похідних за часом* (гілка 4).

Для числового розв'язання *звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР)* при *заданих початкових умовах (задача Коші)* розроблена велика кількість числових методів, причому багато з них отримали розвиток під впливом потреб автоматизованого проектування. Специфіка алгебраїзації похідних у часі зумовлює доцільність виділення для гілки 4 спеціальних засобів математичного та програмного забезпечення, відмінних від таких же засобів для гілок 2 та 3.

Зведення задачі *розв'язання алгебраїчних рівнянь* до послідовності *елементарних операцій* може бути або безпосереднім (гілка 5), наприклад на основі *методів простих ітерацій* або *релаксації*, або за допомогою *попередньої лінеаризації рівнянь* (гілка 6), що становить сутність *методу Ньютон*. Розв'язання *системи лінійних алгебраїчних рівнянь* у цьому випадку (гілка 7) виконується за допомогою *прямих методів*, наприклад *методу Гауса*.

Гілці 8 відповідає перетворення вихідного стану задачі, що належить до макрорівня, на систему ЗДР з відомими початковими умовами. Якщо це система *нелінійних ЗДР*, то подальші перетворення відбуваються

за охарактеризованими вище гілками 4, 6, 7 або 4, 5; якщо ж це система *лінійних ЗДР*, то доцільним є безпосередній перехід до системи *лінійних алгебраїчних рівнянь* (гілка 9).

Для аналізу об'єктів на метарівні використовують або перехід до ЗДР (гілка 10), або перехід до систем *логічних рівнянь, моделей масового обслуговування* або *аналітичних моделей*, що відображають спрощено техніко-економічні показники об'єкту (гілка 11). Зведення цих форм моделей у послідовність *елементарних обчислювальних операцій* (гілка 12) не викликає ускладнень.

Ефективність використовуваних чисельних методів визначає загальну ефективність виконання процедур моделювання.

## **7.2 Практика використання математичних моделей в задачах аналізу технічних об'єктів та процесів у технологічних системах.**

Наведемо математичні формулювання типових задач аналізу технічних об'єктів.

1 *Аналіз динамічних процесів* виконується шляхом розв'язання систем ЗДР. У загальному випадку система ЗДР представлена у неявному вигляді  $\bar{F}(\bar{d}\bar{U}/dt, \bar{U}, \bar{W}, t) = 0$  з відомими початковими умовами; тут  $\bar{V} = (\bar{U}, \bar{W})$  – вектор фазових змінних. Розв'язання системи ЗДР неявними та явними чисельними методами дозволяє отримати залежність  $\bar{V}$  від  $t$ . Більшість вихідних параметрів об'єктів, що проектуються, є функціоналами залежностей  $\bar{V}(t)$  (наприклад, визначеними інтегралами, екстремальними значеннями, моментами перетину заданих рівнів фазових змінних).

2 *Аналіз статичних станів об'єктів* виконується розв'язанням систем рівнянь  $F(\bar{V}) = 0$  різними ітераційними методами.

3 *Аналіз частотних характеристик* передбачає припустимість лінеаризації математичної моделі, тобто система рівнянь може бути представлена у вигляді:

$$\bar{A} \bar{d}\bar{U}/dt + \bar{B} \bar{U} + \bar{C} \bar{W} + \bar{D} \bar{U}_{ex}(t) = 0,$$

де  $A, B, C, D$  – матриці з постійними або залежними від часу коефіцієнтами;

$\bar{U}_{ex}(t)$  – задана вектор-функція, що відображає зовнішні дії на об'єкт, що аналізується.

Задаючись синусоїдальним зовнішнім впливом на один зі входів об'єкту та використовуючи для алгебраїзації перетворення Фур'є, переходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь з комплексним коефіцієнтом:

$$j\omega \bar{A} \bar{U} + \bar{B} \bar{U} + \bar{C} \bar{W} + \bar{D} = 0,$$

де  $\bar{U}, \bar{W}$  – перетворені по Фур'є вектори  $\bar{U}$  та  $\bar{W}$ .

Розв'язання системи здійснюється методом Гауса для значень частоти  $\omega$ . Отримують залежність  $\bar{U}(\omega)$  – **частотні характеристики** об'єкту, за якими визначаються резонансні частоти, смуга пропускання тощо.

4 **Аналіз сталості** може бути виконаний безпосереднім інтегруванням системи ЗДР або її дослідженням за відомими критеріями сталості.

5 **Аналіз чутливості** полягає у визначенні впливу внутрішніх та вхідних параметрів  $x_j$  на вихідні параметри  $y_j$ .

Кількісна оцінка цього впливу виражається матрицею чутливості  $\bar{A}$  з елементами  $a_{ji} = dy_j/dx_j$ , які називаються коефіцієнтами чутливості.

Порівняти вплив різних параметрів зручно за допомогою **коефіцієнтів чутливості впливу**  $b_{ij} = a_{ij} x_{iном} / y_{iном}$ , де  $x_{iном}$  та  $y_{iном}$  – номінальні значення  $x_i$  та  $y_i$  відповідно.

Найбільш універсальний метод аналізу чутливості – **метод припущень** – базується на чисельному диференціюванні функцій  $y_i = f(X)$ .

6 **Статистичний аналіз** виконується з метою отримання тих чи інших відомостей про розподіл параметрів  $y_i$  при заданні статистичних відомостей про параметри  $x_i$ . Результати статистичного аналізу можуть бути отримані у вигляді гістограм розподілу  $y_i$ , оцінок чисельних характеристик розподілів (**математичного чекання, дисперсії**). Найбільш розповсюдженим методом статистичних досліджень та випробувань є **метод Монте-Карло**.

При **розв'язанні задач аналізу на метарівні** використовується укрупнений математичний опис досліджуваних об'єктів.

Одним з найбільш загальних підходів до розв'язання задач аналізу на метарівні є **функціональне моделювання**, що знайшло широке використання для аналізу **систем автоматного управління (САУ)** та енергетичних систем. Для такого підходу використовується низка спрощень:

1) об'єкт представляється як сукупність елементів, пов'язаних один з одним обмеженим числом зв'язків. Для кожного елемента зв'язки розділяються на входи та виходи;

2) елементи вважаються односпрямованими, тобто такими, у яких вхідні сигнали можуть передаватися до вихідних, але вихідні не впливають на стан входів (сигнал – зміна фазових змінних);

3) стан будь-якого виходу не залежить від навантаження, тобто кількості та виду елементів, підключених до цього виходу;



4) стан будь-якого зв'язку характеризується однією фазовою змінною (типу потенціалу, потоку).

Ухвалення таких припущень забезпечує спрощення математичних моделей елементів та методів отримання математичних моделей систем.

Математичні моделі системи при функціональному моделюванні являють собою систему ЗДР, отримувану безпосередньо об'єднанням математичних моделей елементів (за допомогою ототожнення фазових змінних поєднаних входів та виходів).

Чисельні методи розв'язання ЗДР для задач мета- та макрорівня є аналогічними.

Інший загальний підхід до розв'язання задач аналізу на метарівні – **моделі систем масового обслуговування (СМО)**, що знайшли використання при розв'язанні технологічних та організаційних задач аналізу роботи виробничих цехів та дільниць, оброблюючих центрів, автоматизованих систем управління.

Моделі СМО використовують у випадках, коли досліджуваний об'єкт призначений для обслуговування багатьох замовлень, що надходять до СМО у нерегулярні моменти часу. Особливістю моделей СМО є наявність в них елементів двох різних типів: обслуговуючих апаратів (**ресурсів**) та замовлень (**транзактів**).

Математичні моделі СМО можуть бути **аналітичними** та **імітаційними**.

**Аналітичні моделі СМО** передбачають опис об'єкту, що моделюється, за допомогою набору математичних формул.

**Імітаційні моделі СМО** передбачають прямий опис об'єкту, що моделюється, та його елементів за допомогою алгоритмів функціонування.

Типовий об'єкт моделювання за допомогою моделей СМО – оброблюючий центр. У якості входів моделі слугують потоки оброблюваних виробів, інструментів, енергії, керуючої інформації; у якості виходів – потоки оброблених деталей, зношених інструментів, інформації, що надходить до керованої системи. Стан оброблюючого центру визначається наступними параметрами: перелік інструментів у магазині, тип інструменту у шпинделі, рух різального інструменту, тривалість операції. Процес функціонування оброблюючого центра – зміна його станів у часі.

## ЛЕКЦІЯ 8. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В ЗАДАЧАХ ПАРАМЕТРИЧНОГО СИНТЕЗУ ТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ТА ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

*План.*

*8 Класифікація задач параметричного синтезу технічних об'єктів та технологічних процесів.*

*9 Математичне формулювання основної задачі оптимізації параметрів та допусків.*

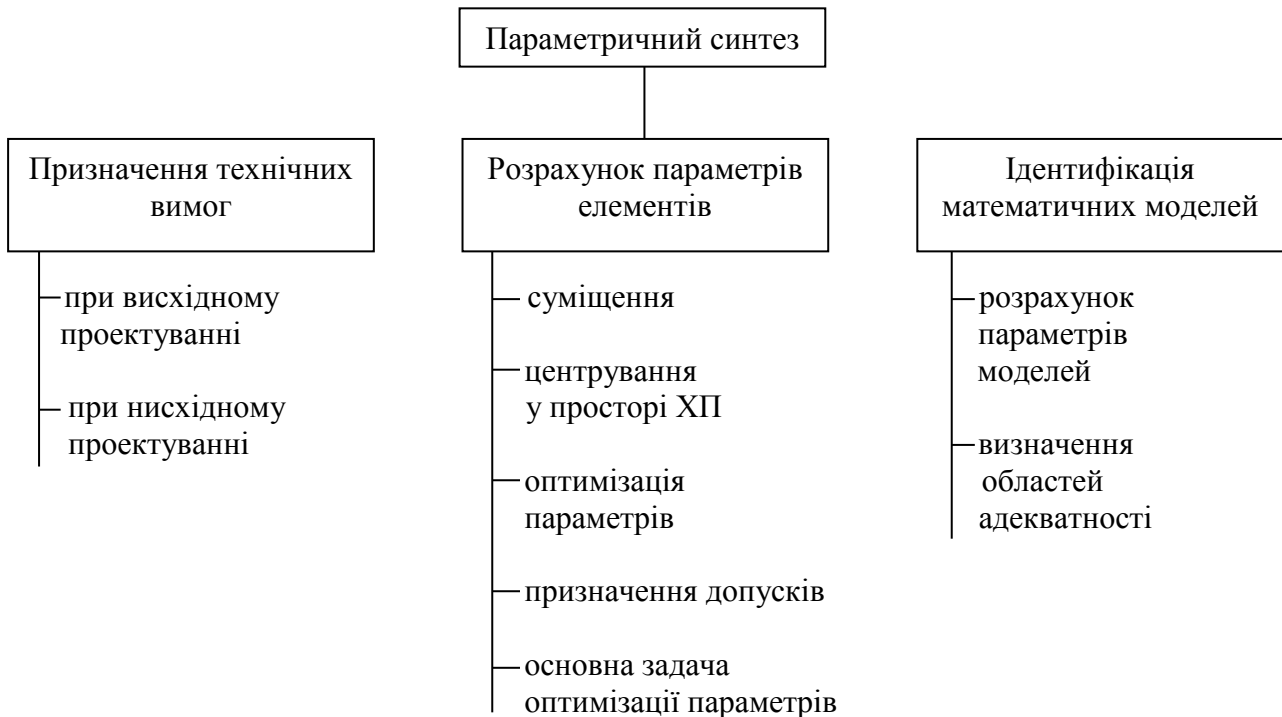
*10 Різновиди постановок задач параметричного синтезу технічних об'єктів та технологічних процесів.*

*СРС:* приклади використання математичних моделей в задачах параметричного синтезу процесів та систем механічної обробки.

*Література:* [4, с. 70–80; 9, с. 144–151].

### *8.1 Класифікація задач параметричного синтезу технічних об'єктів та технологічних процесів.*

До *задач параметричного синтезу* належать задачі, пов'язані з визначенням технічних вимог до параметрів об'єкту, номінальних значень цих параметрів та їхніх допусків. Класифікація задач параметричного синтезу показана на рисунку 8.1.



*Рисунок 8.1 – Класифікація задач параметричного синтезу*

Для пояснення сутності задач параметричного синтезу використовують *геометричну інтерпретацію*, пов'язану з введенням  $n$ -вимірному простору *ХП керованих параметрів* та (або)  $m$ -вимірному простору *УП вихідних параметрів* (тут  $n$  – кількість керованих параметрів, тобто внутрішніх параметрів, значення яких мають бути визначені при параметричному синтезі,  $m$  – кількість вихідних параметрів). Кожній точці простору *ХП* (*УП*) відповідає вектор значень керованих (або вихідних) параметрів. Складові цього вектору – координати точки.

*Група 1 задач параметричного синтезу* пов'язана з призначенням технічних вимог до вихідних параметрів області.

На верхньому ієрархічному рівні нисхідного проектування або на кожному ієрархічному рівні висхідного проектування ця задача не може бути повністю формалізованою. Як правило, висхідне технічне завдання (*ТЗ*) відображає потреби у нових технічних виробах, їхнє призначення, досвід виробництва та використання прототипів і формулюється на основі думок експертів, вимагаючи подальшої конкретизації та узгодження. Суттєвою частиною *ТЗ*, що формується, є перелік вихідних параметрів об'єкту  $y_j$  та значення технічних вимог  $TT_j$  до них, тобто *умови працездатності*  $y_j \leq TT_j$ . Визначення вектору технічних вимог *ТТ* – основна задача параметричного синтезу, що вирішується при зовнішньому проектуванні.

На усіх ієрархічних рівнях нисхідного проектування, крім найвищого, задача призначення *ТТ* може бути представлена як задача оптимального перетворення *ТТ* до підсумкових параметрів об'єкту на  $k$ -му рівні в *ТТ* до вихідних параметрів частин об'єкту на  $(k + 1)$ -му рівні.

Призначення *ТТ* можна представити як виділення у просторі *УП області працездатності* *УР*:

$$UR = \{U \in UP \mid y_j \leq TT_j, j \in [1: m]\},$$

де  $[1 : m]$  означає множину цілих чисел у інтервалі  $[1, m]$ .

*Областю працездатності* *ХР* у просторі керованих параметрів називають множину точок  $X \in XP$ , у яких виконуються усі *задані умови працездатності*  $y_j(X) \leq TT_j$  та *додаткові обмеження на керовані параметри* типу  $x'_i \leq x_i \leq x''_i$ , що називаються *прямими обмеженнями* та виражають умови фізичної або технологічної реалізованості параметрів, тобто:

$$XP = \{X \in XP \mid y_j(X) \leq TT_j, x'_i \leq x_i \leq x''_i, j \in [1: m], i \in [1: n]\}.$$

*Група 2 задач параметричного синтезу* пов'язана з *розрахунком параметрів елементів об'єкту* при заданій структурі об'єкту. Параметри проєктованих об'єктів, як правило, є *випадковими величинами* внаслідок того, що вони не піддаються чіткому врахуванню похибок виготовлення та випадкового характеру параметрів матеріалів. Тому у загальній постановці під визначенням параметрів розуміємо розрахунок як *вектору*

номінальних значень параметрів  $X_{ном}$ , так і вектору їхніх допусків  $G$ . Під номінальним значенням  $X_{ном}$  параметра  $x_i$  частіше за все розуміють його математичне чекання, а під допуском  $g_i$  – половину інтервалу зі значенням  $x_{ном}$  у центрі та імовірністю потрапляння у нього значень  $X_i$ , що дорівнює заданій величині  $P$ .

Задача визначення параметрів вирішується після призначення умов працездатності. На рисунку 8.2 представлені область працездатності  $XP$  та допускova область  $XG$  параметра, їхні межі показані суцільними та пунктирною лініями відповідно.

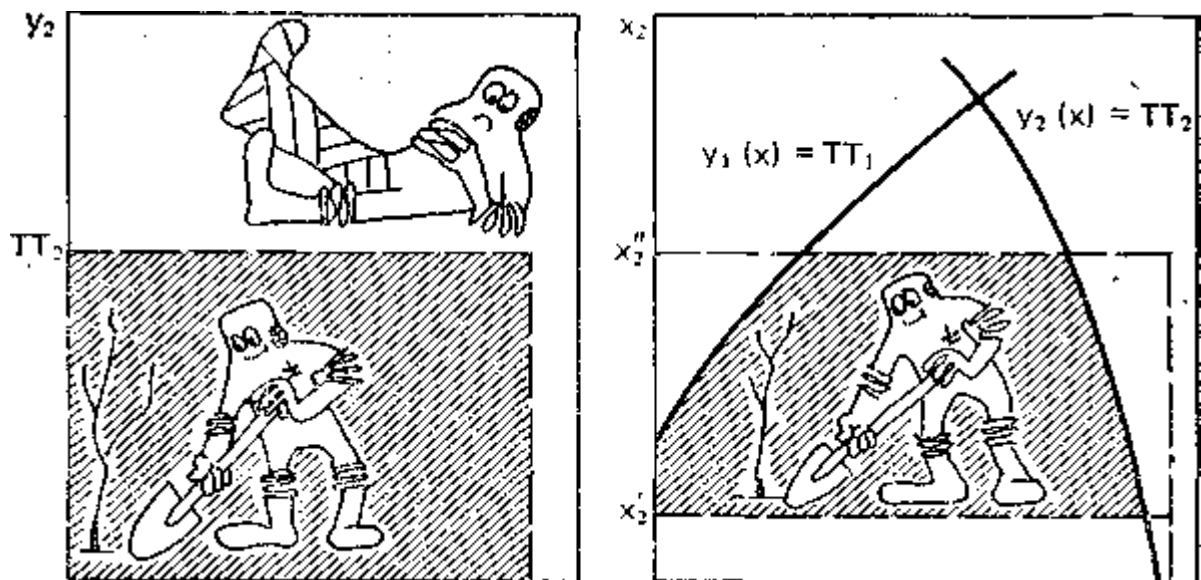


Рисунок 8.2 – Приклади областей працездатності  $XP$  та  $XG$  [4]

У практиці математичного моделювання зустрічаються такі різновиди задач визначення параметрів елементів, як *задача суміщення*, *задача центрування*, *задача оптимізації параметрів без урахування відомостей про їхній розподіл*, *задача призначення допусків*, *основна задача оптимізації параметрів та допусків*. (рисунки 8.3).

*Задача суміщення* вирішується при відомій формі (часто і при відомих розмірах) області  $XG$  та зводиться до такого суміщення областей  $XP$  та  $XG$ , при якому імовірність виконання заданих умов працездатності є максимальною (рисунки 8.3 б).

*Задача центрування* – частковий випадок задачі суміщення, коли відомості про передбачувану кореляцію та асиметрію розподілів параметрів відсутні. Задача зводиться до знаходження центру  $X^*$  області  $XP$  у нормованому просторі параметрів, цей центр і приймається у якості шуканої точки  $X_{ном}$  (рисунки 8.3 в).

*Задача оптимізації параметрів без урахування відомостей про їхній розподіл* зводиться до задачі математичного програмування.

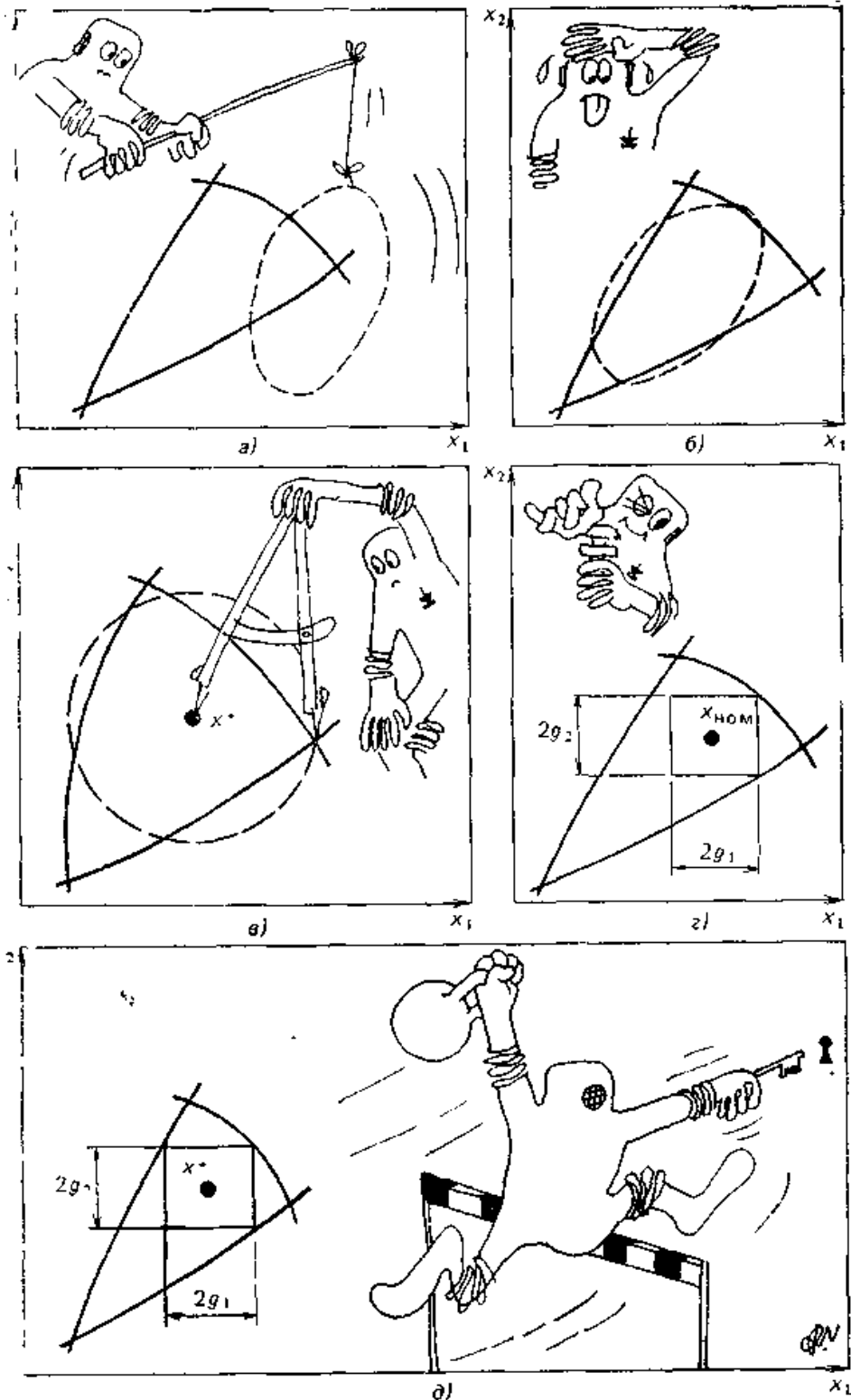


Рис. 25.

а) область працездатності (суцільна лінія) та допускova область (пунктирна лінія); б) задача суміщення; в) задача центрування; г) задача призначення допусків; д) основна задача оптимізації параметрів та допусків

Рисунок 8.3 – Різновиди задач визначення параметрів елементів технічних об'єктів [4]

Для нормування підсумкових параметрів добре мати відомості про допускову область, але не у просторі  $XП$  керованих параметрів, а у просторі  $УП$  вихідних параметрів.

**Задача призначення допусків** вирішується при заданих векторі  $X_{ном}$  та передбаченнях стосовно економічно виправданих співвідношень між допусками  $g_i$  окремих параметрів. Ця задача зводиться до вибору прийняттого проценту виходу придатних виробів при їхньому виробництві та вписуванню гіперпаралелепіпеда допусків у  $XP$ . На рисунку 8.3, г наведено приклад гіперпаралелепіпеда, отриманого для умов 100-процентного виходу годних.

**Основна задача оптимізації параметрів та допусків** полягає у визначенні векторів  $X_{ном}$  та  $G$  при заданих співвідношеннях між допусками  $g_i$  окремих параметрів (рисунок 8.3, д).

**Група 3 задач параметричного синтезу** пов'язана з визначенням параметрів використовуваних математичних моделей та визначенням областей їхньої адекватності. Це – **задачі ідентифікації параметрів розроблюваних моделей, задачі визначення областей адекватності математичних моделей.**

## 8.2 Математичне формулювання основної задачі оптимізації параметрів та допусків.

Більшість задач параметричного синтезу елементів технічних об'єктів зводиться до розв'язання задач математичного програмування.

**Задача математичного програмування** формулюється наступним чином:

$$\text{extr } F(X), X \in XD$$

тобто потрібно знайти **екстремум** (максимум або мінімум) **цільової функції**  $F(X)$  у межах **припустимої області**  $XD$  **зміни керованих параметрів**  $X$ . Область  $XD$  може задаватися сукупністю обмежень загального вигляду

$$XD = \{X \in XП \mid \varphi(X) > 0, \psi(X) = 0\},$$

де  $\varphi(X)$  и  $\psi(X)$  – вектор-функції.

Розв'язання основної задачі оптимізації параметрів та допусків є двохетапним.

**Етап 1 – розв'язання задачі попередньої оптимізації параметрів елементів.** Мета розв'язання цієї задачі – визначення деякої опорної точки  $X_0 \in XP$ . Можливі випадки, коли вектор  $ТТ$  заданий достатньо жорстко та область  $XP$  лишається порожньою. У цих випадках рішення  $XP = 0$  з укаванням тих конфліктних (суперечливих) підсумкових параметрів,

вимоги до яких не можуть бути одночасно задоволені. На підставі цих даних ухвалюють рішення при зміні структури об'єкту, або технічних вимог до конфліктних підсумкових параметрів.

Основними питаннями, що вирішуються при зведенні попередньої задачі оптимізації до задачі математичного програмування, є вибір **критерію оптимальності цільової функції та обмежень**.

Серед критеріїв оптимальності найбільш популярними є **частковий та максимінний критерії**. У **частковому критерії оптимальності** у якості цільової функції обирають один з вихідних параметрів, тоді умови працездатності інших вихідних параметрів входять у систему обмежень, що доповнюється прямими обмеженнями. Керованими параметрами є розглянуті параметри елементів об'єкту. При цьому опорна точка  $X_e$  – результат розв'язання задачі попередньої оптимізації, як правило, буде знайдена на межі області  $XP$ . У більшості випадків таке положення опорної точки є несприятливим для виконання другого етапу оптимізації, тому частіше використовують **максимінний критерій оптимальності**, при якому точка  $X_e$  розміщується всередині області  $XP$  на максимальній відстані від найближчої межі області.

При постановці та розв'язанні задач попередньої оптимізації можуть мати місце операції, що передбачають порівняння різних параметрів, наприклад визначення відстаней. Для їхнього виконання потрібна нормалізація параметрів, що зводиться до перетворення початкових параметрів, що мають фізичні розмірності, у безрозмірні величини.

Для керованих параметрів  $x_i$  у просторі  $XП$  при розв'язанні попередньої задачі оптимізації використовують логарифмічну нормалізацію

$$u_i = \ln x_i / \xi_i,$$

де  $u_i, x_i$  – відповідно нормалізований та ненормалізований параметри;

$\xi_i$  – коефіцієнт, що дорівнює одиниці параметра  $x_i$ .

Цей спосіб зручний тим, що призводить до використання відносних прирощень параметрів в процесі оптимізації, оскільки  $du_i = dx_i / x_i$ .

Для підсумкових параметрів один спосіб нормалізації базується на перетворенні  $S_j(X) = (TT_j - y_j(X)) / TT_j$ ; інший спосіб – на понятті **запасу працездатності**  $Z_j$ . Останній спосіб зручний при наявності апріорних відомостей про допуски підсумкових параметрів  $\delta_j$  та полягає у переході від параметрів  $y_j$  до їхніх нормалізованих запасів працездатності у вигляді

$$Z_j = a_j((TT_j - y_j(X)) / (\delta_j - 1)),$$

де  $a_j$  – деякий ваговий коефіцієнт.

Постановка задачі попередньої оптимізації на основі максимінного критерію зазвичай здійснюється при виборі у якості цільової функції

мінімального запасу серед запасів працездатності усіх вихідних параметрів, а у якості обмежень – прямих обмежень.

**Етап 2 – розв’язання задачі вписування допусккової області.** Задача зводиться до взаємного розташування заданої області працездатності  $XP$  та деякої допусккової області  $XG$  із заданими властивостями у просторі  $X\Pi$ . Задача може бути представлена як задача математичного програмування, у якій в якості керованих параметрів  $X$  фігурують параметри, що задають форму *гіперфігури*  $XG$  та її положення у просторі  $X\Pi$ , в якості цільової функції – оцінка розмірів області перетину  $XP \cap XG$ , а в якості обмежень – умови малості розходження положень областей  $XP$  та  $XG$ .

При визначенні допусків вписаною фігурою є *гіперпаралелепіпед*. Задані співвідношення між допусками  $g_i$  та результати попередньої оптимізації зазвичай використовують для нормалізації параметрів  $x_i$  на етапі вписування. Наприклад,

$$u_i = a_i (x_i - x_{\text{эi}}) / (x_{\text{эi}} + 1),$$

де  $x_i, x_{\text{эi}}$  – ненормалізований  $i$ -й параметр та його значення у опорній точці;  
 $a_i = g_i / g_i, u_i$  – нормалізований  $i$ -й параметр.

При такому способі нормування вписаною фігурою має бути *гіперкуб*. Рисунок 8.4 пояснює спосіб розв’язання задачі для випадку, коли витрати при виробництві на отримання допуску  $g_1 = 20\%$  еквівалентні до витрат на отримання допуску  $g_2 = 40\%$  та відома опорна точка  $X_3 = (10; 10)$ . Процедура вписування заштрихованого квадрату у область працездатності дає допускову область.

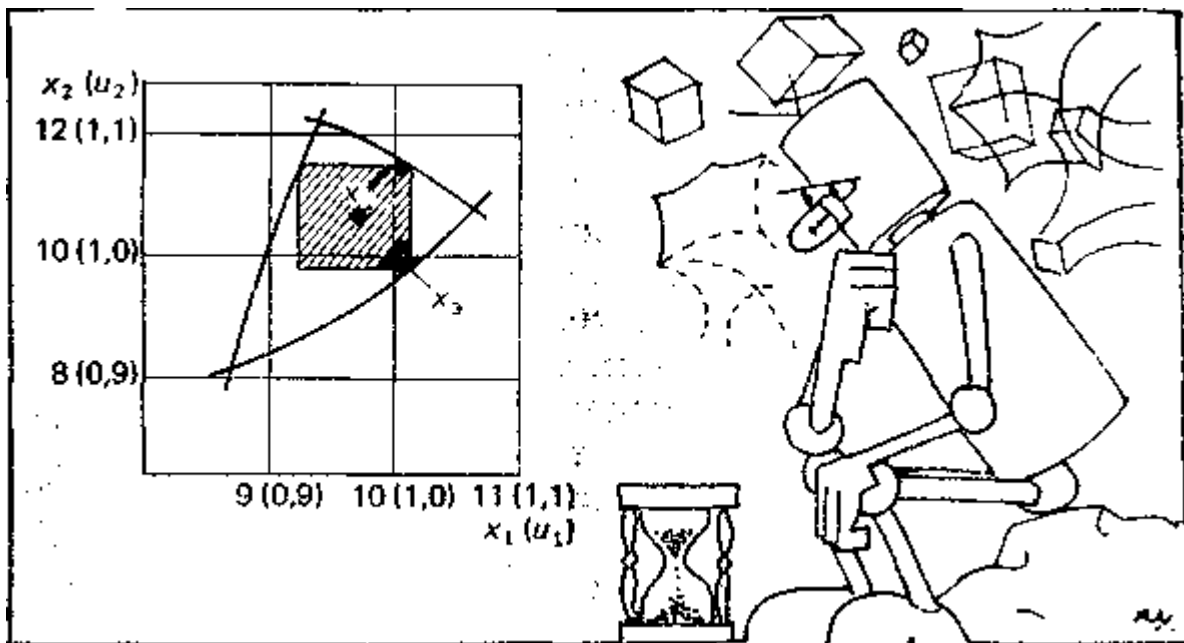


Рисунок 8.4 – Розв’язання задачі вписування допусккової області [4]



### 8.3 *Різновиди постановок задач параметричного синтезу.*

Постановки інших задач параметричного синтезу як задач математичного програмування є тими чи іншими різновидами розглянутих постановок попередньої оптимізації та вписування гіперфігур.

Для розв'язання *задач оптимізації параметрів* достатньо виконати етап попередньої оптимізації з використанням максимінного критерію та нормуванням простору вихідних параметрів за допомогою запасів працездатності.

*Задачі призначення допусків* зводяться до виконання тільки етапу вписування гіперфігури у область працездатності. Спрощуюча відмінність цих задач – задання положення центру вписаного гіперкуба.

*Задачі суміщення та центрування*, як і основна задача оптимізації, є двохетапними: етап 1 – попередня оптимізація у всіх цих задачах – виконується аналогічно, а етап 2 – власне центрування – відрізняється тим, що в ній допуски  $g_i$  є заданими і потрібно тільки сумістити центр області працездатності з центром допускової області. Таке суміщення може бути виконане аналогічно до вписування гіперкуба у основній задачі, але можливі і інші способи, наприклад центрування шляхом вписування гіперсфери максимального радіусу.

*Задачі призначення технічних вимог  $TT$*  на проміжних ієрархічних рівнях нисхідного проектування за своїм характером, способами постановки та розв'язання близькі до основної задачі оптимізації параметрів та допусків. Але в задачах призначення  $TT$  результатом розв'язання є умови працездатності при проектуванні об'єкту на наступному ієрархічному рівні, а не допуски, що використовуються при подальшому виготовленні деталей; Умови працездатності – зазвичай односторонні обмеження, а допуски характеризують двосторонні обмеження. Як наслідок, підвищується відповідальність призначення прямих обмежень, оскільки без них область  $XP$  часто є необмеженою.

Задачі призначення технічних вимог  $TT$  на основі думок експертів розв'язуються у процесі зовнішнього проектування, коли структура майбутнього об'єкту відрізняється невизначеністю. Важливою особливістю цих задач є використання наближених математичних моделей, що відображають уявлення ідеологів розроблюваної системи про співвідношення між досяжними параметрами об'єктів, термінами проектування, витратами на розробку та виготовлення. Друга особливість – у процесі зовнішнього проектування розробник повинен мати можливість оперативного внесення змін до використовуваних математичних моделей, змін цільових функцій, обмежень та керованих параметрів.

*Задачі ідентифікації параметрів розроблюваних моделей* формулюються як задачі математичного програмування, у яких цільова функція – оцінка ступеня співпадіння вихідних параметрів, отримуваних

за допомогою випробуваної та еталонної моделей, а керовані параметри – параметри випробуваної моделі.

**Задачі визначення областей адекватності математичних моделей** відрізняються від задач призначення допусків при заданому векторі номінальних значень тим, що вписування відбувається не у просторі параметрів елементів, а у просторі зовнішніх параметрів, оскільки область адекватності має характеризувати діапазони зміни зовнішніх змінних, у яких математична модель є адекватною.

Розв'язання задач параметричного синтезу виконується **методами пошукової оптимізації**, що базується на послідовних наближеннях до оптимального рішення. Кожна **ітерація** являє собою крок у просторі керованих параметрів. **Основні характеристики методу оптимізації** – способи визначення напрямку кроку у просторі  $X_{II}$ , величини цього кроку та моменту закінчення пошуку.

## ЛЕКЦІЯ 9.

# МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В ЗАДАЧАХ СТРУКТУРНОГО СИНТЕЗУ ТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ТА ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

*План.*

*11 Класифікація задач структурного синтезу технічних об'єктів та технологічних процесів.*

*12 Методика опису структур технічних об'єктів.*

*13 Підходи до вирішення задач структурного синтезу технічних об'єктів та технологічних процесів.*

*СРС:* приклади використання математичних моделей в задачах структурного синтезу систем механічної обробки.

*Література:* [4, с. 80–90; 9, с. 138–144].

### *9.1 Класифікація задач структурного синтезу технічних об'єктів та технологічних процесів.*

*Процедури структурного синтезу* при проектуванні технічних об'єктів відносять до найбільш важко формалізовуваних. У той же час ступінь автоматизації проектування технічних об'єктів залежить в першу чергу від успіхів у розробці методів та алгоритмів структурного синтезу.

В залежності від *стадії проектування*, на якій здійснюється структурний синтез, розрізняють наступні *процедури структурного синтезу*:

1) *процедури вибору основних принципів функціонування об'єкту* (інформаційних, організаційних, фізичних та ін.); у цій групі процедур часто виділяють *процедури вибору фізичних принципів дії*;

2) *процедури вибору технічного рішення* у межах заданих принципів функціонування об'єкту;

3) *процедури оформлення технічної документації*.

*Процедури вибору основних принципів функціонування об'єкту* виконуються на ранніх стадіях проектування, зазвичай на стадії науково-дослідних робіт (НДР). При цьому широко використовуються типові прийоми теорії розв'язання винахідницьких задач (ТРВЗ), що допомагають також і в автоматизації процедур. При отриманні *технічного завдання (ТЗ)* на розробку об'єкту проектувальник намагається розв'язати задачу на основі *накопиченого досвіду*, з урахуванням наявних прототипів. Накопичений досвід систематизується у спеціальних розділах бази даних (розділі типових рішень, розділі фізичних ефектів тощо). Наприклад, у описі фізичних ефектів для пристроїв автоматичного друку можуть бути присутніми описи механічного удару по паперу крізь фарбуючу стрічку, електротермічного, фотографічного та інших способів отримання зображень. Орієнтація тільки

на накопичений досвід заважає побачити принципово нові рішення внаслідок дії *психологічної інерції*. Отриманню оригінальних рішень сприяють *евристичні прийоми синтезу*, систематизовані у спеціальному розділі бази даних. *Евристичні прийоми синтезу* можна згрупувати у прийоми змін у просторі, у часі, перетворень форми, матеріалів, видів руху, модифікацій додаванням, виключенням, заміною тощо, наприклад: «*замінити орієнтацію об'єкту у просторі – повернути низом догори*», «*сумістити операції у часі*», «*зробити об'єкт прозорим*», «*розділити руханий потік на два чи декілька*» тощо.

*Процедури вибору технічних рішень* виконуються на наступних стадіях проектування та передбачають конкретизацію раніше обраних принципів функціонування об'єкту. Наприклад, механічний принцип отримання відбитку на папері реалізується у пристроях з матричними, сферичними, циліндричними, дисковими знаконосіями тощо. Виконання процедур передбачає використання бібліотек типових рішень.

У *процедурах оформлення технічної документації* синтезується не зміст, а форма представлення описів проектних рішень. Оформлення технічної документації регламентується стандартами. Для перетворення описів з внутрішньої мови обчислювальної машини на документацію, що відповідає стандартам оформлення, здійснюють низку процедур, пов'язаних з трансляцією мовних представлень, компонуванням текстової та графічної інформації за сторінками та аркушами, розміщенням фрагментів зображень на папері, синтезом проєкцій, перетинів, проставленням розмірів тощо. Особливість оформлення технічної документації як процедури структурного синтезу полягає у її рутинному характері, що зумовлює актуальність та можливість формалізації. Обмежуючі фактори в автоматизації оформлення технічної документації – недоліки використовуваних пристроїв машинної графіки.

В залежності від *можливостей формалізації* задачі синтезу технічних об'єктів поділяються на **5 рівнів складності**.

До *задач I рівня складності* відносять задачі, у яких вимагається виконання лише параметричного синтезу, а структура об'єкту визначена специфікою ТЗ або результатами попередніх етапів проектування.

До *задач II рівня складності* відносять задачі, у яких можливий повний перебір відомих рішень. Це задачі вибору елементів у скінченних множинах малої потужності. У цих задачах елементи множини структур являють собою заздалегідь складені та включені до бази даних опису структур, або є алгоритм, що дозволяє почергово отримувати та аналізувати усі елементи множини за прийнятний час.

До *задач III рівня складності* відносять задачі, які не можуть бути розв'язані шляхом повного перебору за прийнятний час. Приклади таких задач – задачі компонування та розміщення обладнання у обмежених просторах, проведення трас, більшість процедур оформлення технічної документації. Також до задач III рівня складності зводиться багато задач

синтезу більш високих рівнів при прийнятті відповідних обмежень та припущень.

До *задач IV рівня складності* відносять задачі пошуку варіантів структур у рахункових множинах невідомої або необмеженої потужності. Розв'язання таких задач формалізувати дуже складно, але є можливість отримання нових оригінальних патентоспроможних рішень.

До *задач V рівня складності* відносять задачі синтезу, розв'язання яких є еквівалентним до пропозиції принципово нових основ побудови цілого класу технічних об'єктів.

В залежності від *типу структур об'єктів, що синтезуються*, розрізняють *задачі одновимірного, схемного та геометричного синтезу*.

При *одновимірному синтезі* розв'язують задачі впорядкування елементів структури у одновимірних просторах (наприклад, задачі складання розкладів).

При *схемному синтезі* визначають структуру об'єкту без конкретизації його геометричних властивостей. Приклади – синтез кінематичних, електричних, функціональних схем тощо.

*Геометричний синтез* полягає у конкретизації геометричних властивостей об'єктів та включає задачі оформлення конструкторської документації, а також позиціонування та синтезу поверхонь і траєкторій. До *задач позиціонування* відносять задачі взаємного розташування у просторі деталей заданої геометричної форми, задачі вибору баз для механічної обробки деталей складної форми тощо. До *задач синтезу поверхонь і траєкторій* відносять задачі проектування поверхонь, які обтікає потік газу або рідини (крило літака, лопатка турбіни), синтезу траєкторії рухомих робочих органів технологічних агрегатів, синтезу профілів несівних конструкцій тощо.

## 9.2 Опис структур об'єктів у вигляді ТА-АБО-дерева.

Для розв'язання задач структурного синтезу необхідно вирішити питання про способи *формального опису структур проєктованих об'єктів* та стратегії використання цих способів, що веде від вихідного ТЗ до опису структур у вигляді комплекту конструкторсько-технологічної документації.

Формальний опис структур об'єктів у межах *блочно-ієрархічного підходу* можливий за допомогою *ТА-* чи *ТА-АБО-дерева*.

*ТА-дерево* використовується для опису *структури конкретного об'єкту* та являє собою множину *вершин* та *ребер*, які їх зв'язують. Вершини розділені на *яруси*, кожен ярус належить до одного з ієрархічних рівнів, вершини відображають складові частини об'єкту.

*ТА-АБО-дерева* використовують для опису структури певного класу об'єктів. У *ТА-АБО-дереві* кожен ярус складається або з вершин *АБО*, або з вершин *ТА*, причому сусідні яруси є ярусами різнотипних вершин.

На рисунку 9.1 наведений фрагмент *ТА-АБО-дерева*, на якому вершини *ТА* показані темними кружальцями, а вершини *АБО* – світлими.

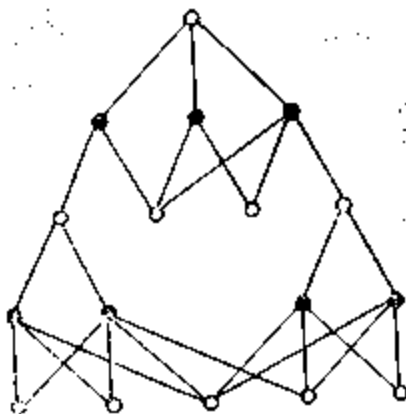


Рисунок 9.1 – Фрагмент *ТА-АБО-дерева*

У *ТА-АБО-дереві* виділяють *кущі*. *Кущем типу ТА* називають частину дерева, що складається з однієї вершини *ТА* і усіх суміжних з нею вершин *АБО* з сусіднього нижнього ярусу. У кущі типу *ТА* вершина *ТА* відображає певний варіант побудови об'єкту, а вершини *АБО* – складові частини цього варіанту. Кущем типу *АБО* називають частину дерева, що складається з однієї вершини *АБО* та усіх суміжних з нею вершин *ТА* з сусіднього нижнього ярусу. У такому кущі вершинами *ТА* представлені можливі взаємовиключні варіанти побудови об'єкту, що відображається вершиною *АБО*. Ці варіанти називають *альтернативами*, а сукупність вершин *ТА* у кущі типу *АБО* – *альтернативною лінійкою*.

У найзагальнішому *ТА-АБО-дереві* коренева вершина графа відповідає множині технічних систем, вершини першого ярусу – цільовим призначенням систем, вершини другого ярусу – функціям систем. Вершини наступних ярусів слугують для відображення типів та складових частин систем аж до базових елементів. Зазвичай *ТА-АБО-дерева* отримують об'єднанням описів декількох конкретних структур (*ТА-дерев*). Відомості, вміщені у *ТА-АБО-дереві*, вміщують до бази даних. Кожній вершині при цьому відповідає порція інформації, а усьому *ТА-АБО-дереву* – сукупність порцій.

*ТА-АБО-дерева* можуть мати відомості не тільки про раніше реалізовані, але і про нестворені, хоча і принципово можливі структури. Тому виділяють *ТА-АБО-дерева* зі скінченними та безкінечними множинами вершин.

### **9.3 Підходи до розв'язання задач структурного синтезу технічних об'єктів.**

Формалізація процедур структурного синтезу на кожному ієрархічному рівні здійснюється на основі одного з наступних підходів:

- 1) *перебір*;
- 2) *послідовний синтез*;
- 3) *трансформація описів різних аспектів*.

Відповідно розрізняють *алгоритми перебору (перебірні алгоритми)*, *послідовні алгоритми синтезу*, *алгоритми послідовності описів*.

*Алгоритми перебору (перебірні алгоритми)* характеризуються можливостями оцінки тільки варіантів готових структур, що створюються заздалегідь, або генеруються за тими чи іншими правилами з заданого набору елементів. Повний перебір варіантів можливий лише у найпростіших випадках. Як правило, перебір – частковий. Алгоритми перебору включають елементи:

- 1) *вибору або генерації чергового варіанту структури*;
- 2) *оцінки варіанту структури*;
- 3) *прийняття рішення*.

*Вибір варіанта структури при частковому переборі* базується на випадковій вибірці, використанні евристичних здатностей людини, встановленні кореляції параметрів структури із заданими вимогами до об'єкту. Типові структури групують у базі даних за діапазонами показників ефективності проєктованих об'єктів. Для задач III рівня складності є ускладненою, а для задач IV рівня складності неможливою побудова множини завершених структур. Для них замість завершених структур зберігають описи типових елементів об'єктів, а автоматизація синтезу базується на алгоритмізації процедури генерації структур з типових елементів.

*Оцінка варіанту структури* виконується за допомогою процедур параметричного синтезу та аналізу. Використання повних математичних моделей та процедур параметричної оптимізації є дуже трудомістким та не дозволяє передивитись достатню кількість варіантів. Тому використовують спрощені математичні моделі та непрямі критерії вибору варіантів. Лише для невеликої кількості перспективних варіантів використовують аналіз за повними математичними моделями та оптимізацію параметрів.

*Прийняття рішення* при переборі базується на порівнянні результатів оцінювання чергового варіанту структури з найкращим з раніше переглянутих. Для порівняння обирають скалярний критерій, що об'єднує часткові показники у багатокритеріальних ситуаціях.

Особливе місце у алгоритмах перебору відводять *алгоритмам дискретного математичного програмування (ДМП)*. Їх використовують,

якщо задачу структурного синтезу вдається сформулювати як задачу ДМП, тобто у вигляді:

$$\text{extr } F(X); X \in XD; XD = \{X \in D \mid \varphi(X) \geq 0, \psi(X) = 0\},$$

де  $D$  – дискретна множина варіантів.

Приведення до задачі ДМП базується на пошуку ознак структур, що виражаються кількісно, та на визначенні функції цих ознак, яка виражала б правило переваги одних варіантів над іншими. Такі ознаки об'єднують у вектор  $X$ , а формула переваги стає цільовою функцією  $F(X)$ . Приклади параметрів  $x_i$ , що входять до  $X$ , – кількості елементів певного типу у структурі, тоді  $x_i$  належить множині цілих чисел; наявність чи відсутність у структурі певної властивості, тоді  $x_i$  – бульова величина, що приймає значення з множини  $\{1 (\text{є}), 0 (\text{ні})\}$ .

Послідовні алгоритми синтезу характеризуються поетапним розв'язанням задачі синтезу з можливостями оцінки проміжних структур. Розрізняють два способи отримання завершеної структури об'єкту:

- 1) *нарощування*;
- 2) *виділення*.

При *нарощуванні* відбувається почергове додавання елементів до вихідної структури (в окремих випадках за вихідну структуру може бути прийнятий будь-який елемент). Приклади алгоритмів нарощування – послідовні алгоритми компонування та розміщення обладнання.

При *виділенні* з надлишкової узагальненої структури видаляють зайві елементи. Алгоритми виділення використовують, якщо попередньо складена узагальнена структура класу об'єктів. Приклади таких узагальнених структур – типові технологічні процеси (ТП) обробки деталей на металорізальних верстатах. До типового ТП включають операції, які можуть зустрічатися при різних поєднаннях конструктивних особливостей у деталях даного класу. Співставлення креслення конкретної деталі та типового ТП дозволяє прибрати зайві операції та сформувати конкретний ТП.

*Трансформація описів різних аспектів* формалізується тим краще, чим у більшій мірі співпадають структури *ТА-АБО-дерев*, що належать до розглянутих аспектів. Для вершин, що співпадають, зазвичай вдається встановити однозначну відповідність структурних одиниць, звести перетворення до пошуку співпадінь та підстановок. Приклад – функціонування систем проектування конструкторської документації, у яких результати конструкторського проектування перетворюються на графічне зображення креслення.

Реальні алгоритми структурного синтезу зазвичай є комбінованими та поєднують у собі риси більш ніж одного підходу.

Обмежені можливості формалізації процедур синтезу призвели до широкого використання *автоматизованих діалогових систем синтезу*, у яких процедури оцінювання виконує комп'ютер, а прийняття



рішення – людина. Призначення комп'ютера – підказати типові варіанти та евристичні прийоми. Роль людини – реалізувати евристичні прийоми та модифікації структур. Іноді вдається формалізувати використання евристичних прийомів та отримати алгоритми синтезу, що виконуються без участі людини. Тому основний практичний підхід до розв'язання задач структурного синтезу в САПР – це використання евристичних прийомів синтезу в *діалоговому режимі* роботи проектувальника з комп'ютером.

З кожним роком отримують розвиток *експертні системи*, що сприймають від фахівців знання предметної області, та потім використовують їх при розв'язанні задач структурного синтезу. Програмне забезпечення експертних систем слугує для генерації варіантів структури та для зв'язку користувача з системою у діалоговому режимі.

## ЛІТЕРАТУРА

- 1 Грабченко, А. І. Методи наукових досліджень : Навч. посібник / А. І. Грабченко, В. О. Федорович, Я. М. Гаращенко. – Х. : НТУ «ХПІ», 2009. – 142 с.
- 2 Чкалова, О. Н. Основы научных исследований / О. Н. Чкалова. – Киев, издательское объединение «Вища школа». Головное изд-во, 1978. – 120 с.
- 3 Основы научных исследований : Учеб. для техн. вузов / В. И. Крутов, И. М. Грушко, В. В. Попов и др.; Под ред. В. И. Крутова, В. В. Попова. – М. : Высш. шк., 1989. – 400 с.
- 4 Системы автоматизированного проектирования. Кн. 1. Принципы построения и структура : Учеб. пособие для вузов / И. П. Норенков.– М. : Высш. шк., 1986. – 127 с.
- 5 Системы автоматизированного проектирования. Кн. 4. Математические модели технических объектов : Учеб. пособие для вузов / В. Л. Трудоношин, Н. В. Пивоварова. – М. : Высш. шк., 1988. – 159 с.
- 6 Капустин, Н. М. Автоматизация машиностроения: учеб. для вузов / Н. М. Капустин, Н. П. Дьяконова, П. М. Кузнецов; под ред. Н. М. Капустина. – М. : Высш. шк., 2002. – 223 с.
- 7 Тулупов, В. І. Навчальний посібник з дисципліни «Основи технічної творчості та наукових досліджень» для студентів спеціальності 7.090202 «Технологія машинобудування» / В. І. Тулупов. – Краматорськ : ДДМА, 2008. – 140 с.
- 8 Чус, А. В. Основы технического творчества / А. В. Чус, В. Н. Данченко. – Киев, Донецк : Вища школа. Головное изд-во, 1983. – 184 с.
- 9 Павленко, П. М. Основи математичного моделювання систем і процесів : навч. посіб. / П. М. Павленко. – К. : Книжкове вид-во НАУ, 2010. – 201 с.
- 10 Пестрецов, С. И. Компьютерное моделирование и оптимизация процессов резания : учеб. пособие / С. И. Пестрецов. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2009. – 104 с.